Isospin und Parität in der nichtlinearen Spinortheorie

Von H.-P. Dürr

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik München

(Z. Naturforschg. 16 a, 327—345 [1961]; eingegangen am 3. Oktober 1960)

The isospin transformation properties and the space reflection symmetry in a nonlinear field theory of elementary particles, as proposed by Heisenberg and coworkers, are studied. In section I it is shown that the nonlinear equation $\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi \pm l^2 \gamma_5 \gamma_\mu \psi (\overline{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi) = 0$ for a 4-component spinor operator ψ is equivalent to the equation $-i\,\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \chi \pm l^2 \sigma^\mu \chi (\chi^* \sigma_\mu \chi) = 0$ for a 4-component Weyl-isospinor operator χ. In this Weyl representation of the theory the Pauli–Gürsey transformations and the Touschek transformation can be replaced by the conventional forms of the isospin rotations and the gauge transformation of the first kind, respectively. In section II an attempt is made to introduce parity in a rigorous manner using the invariance of the equation under l-Inversion $l \to -l$. Some important aspects of symmetry operations which involve transformations of parameters, are discussed. By virtue of the parity symmetry a Dirac notation may be introduced, and the nonlinear equation then corresponds to a Touschek invariant equation of the Dirac type with nonlinear vector- and axial-vector terms of equal strength. The existence of particles with finite mass suggests a degeneracy of the ground state "world" with respect to parity. In section III and IV the Tamm–Dancoff-method is applied for an estimate of the masses of nucleons and bosons with spin and isospin zero or one, using the simpler Weyl representation with and without consideration of the parity symmetry, respectively.

I. Darstellung mit Weyl-Isospinoren

Einer nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen, über die in einer früheren Arbeit [1] berichtet wurde, war folgende nichtlineare Differentialgleichung für den vierkomponentigen Spinoroperator $\psi(x)$ zugrunde gelegt worden

$$\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi(x) \pm l^2 \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x) \left[\overline{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)\right] = 0 \tag{1 a}$$

und eine entsprechende Gleichung für den adjungierten Feldoperator

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu} \overline{\psi}(x) \gamma_\nu \pm l^2 \overline{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \left[\overline{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)\right] = 0 . \tag{1 b}$$

Es wurde festgestellt [2], daß diese Gleichungen invariant sind unter den Transformationen der vollen Lorentz-Gruppe, d. h. den eigentlichen Lorentz-Transformationen und den Raum- und Zeitspiegelungen. Die Raumspiegelung wurde hierbei, wie allgemein üblich, durch die Transformation

$$\psi(\mathfrak{r}, t) \to \gamma_4 \psi(-\mathfrak{r}, t) \tag{2}$$

charakterisiert. Die Invarianz gegenüber dieser Transformation ermöglicht im allgemeinen die Definition einer Parität.

Die Gleichungen sind ferner invariant unter den sogen. Pauli–Gürsey-Transformationen [3] und der Touschek-Transformation [4], die erstmalig im Zusammenhang mit der masselosen Dirac-Gleichung studiert wurden

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to a\,\psi(x) + b\,\gamma_5 C^{-1} \overline{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \\ \overline{\psi}(x) &\to a^*\,\overline{\psi}(x) + b^*\,\psi^{\mathrm{T}}(x)\, C\, \gamma_5 \end{aligned} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{3}$$

$$\overline{\psi}(x) \to e^{i\alpha\gamma_5} \psi(x), \qquad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)\, e^{i\alpha\gamma_5} . \tag{4}$$

Gürsey [3] hat gezeigt, daß diese Transformationen äquivalent sind zu Drehungen in einem dreidimensionalen Raum bzw. zu einer Eichtransformation 1. Art. Er hat deshalb vorgeschlagen, diese Transformation mit der Isospintransformation bzw. der Baryoneneichtransformation zu identifizieren.

Es soll gezeigt werden, daß es, wenigstens in diesem Zusammenhang hier, nicht eigentlich naturgemäß ist, den Isospin auf eine solch ungewöhnliche Weise einzuführen. Jedenfalls wäre es eine Täuschung anzunehmen, daß wir durch diesen Kunstgriff bei der Einführung des Isotopenspins das gewohnte Opfer vermieden hätten, die Komponentenzahl des Feldoperators zu verdoppeln. Auf den ersten Blick scheint es, als ob wir dieser Verdopplung

[1] H.-P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder u. K. Yamazaki, Z. Naturforschg. 14 a, 441 [1959], im folgenden als (I) bezeichnet.

[2] W. Heisenberg u. W. Pauli, On the Isospin Group in the Theory of Elementary Particles. Preprint 1958.

[3] W. Pauli, Nuovo Cim. 6, 204 [1957]. — F. Gürsey, Nuovo Cim. 7, 411 [1958].

[4] B. F. Touschek, Nuovo Cim. 5, 1281 [1957].

entgangen wären. Betrachten wir aber die Paritätsoperation (2) genauer, so stellt man fest — was lange bekannt ist —, daß diese Transformation nicht mit den PAULI–GÜRSEY-Transformationen und der TOUSCHEK-Transformation vertauschbar ist. Systeme also, die durch einen bestimmten Isospin und eine bestimmte Baryonenzahl ausgezeichnet sind, lassen sich nicht mehr gleichzeitig durch eine so definierte Parität charakterisieren. Dies heißt aber einfach, wie schon früher bemerkt wurde:

Die auf die übliche Weise definierte Paritätsoperation (2) an den Spinoren ist in unserem Fall *nicht* identisch mit der Operation, die ein gegebenes System in sein gespiegeltes Ebenbild *ohne* Änderung irgendwelcher anderen Eigenschaften (wie hier z. B. der Baryonenzahl u. ä.) überführt. In (I) haben wir schon erwähnt, daß man — wenn die Operatoren nur als Funktionen von Ort und Zeit aufgefaßt werden — keine andere Operation angeben kann, die diese reine Raumspiegelung vollzieht und zur Definition einer vernünftigen Parität verwendet werden kann, und die gleichzeitig die Feldgleichungen streng invariant läßt. Wir haben jedoch in (I) versucht, plausibel zu machen, daß unter gewissen Umständen eine „Parität 2. Art" definiert werden kann, die zwar nicht mehr streng erhalten bleibt, aber im Prinzip zur Beschreibung des physikalischen Sachverhaltes genügen könnte. Wir werden weiter unten darauf zurückkommen.

In Abschnitt II dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß z. B. durch Ausnützung der Abhängigkeit der Feldoperatoren vom Kopplungsparameter l doch eine Paritätsoperation, die von den früher betrachteten etwas verschieden ist, wieder in aller Strenge eingeführt werden kann.

Lassen wir jedoch diese Möglichkeiten vorläufig aus dem Spiel und sehen vom Isospin ab, so stellen wir fest, daß die nichtlineare Differentialgleichung (1) effektiv nur unter den Transformationen der eigentlichen LORENTZ-Gruppe (oder besser: der vollen LORENTZ-Gruppe ohne eigentliche Raumspiegelung, aber mit PC) invariant ist. Man weiß nun [5], daß für diese eingeschränkte Gruppe schon zweidimensionale irreduzible Darstellungen existieren; d. h. schon zweikomponentige komplexe Spinorfunktionen, die wir WEYL-Spinoren nennen wollen, spannen den irreduziblen Darstellungsraum auf.

[5] Zum Beispiel: B. L. VAN DER WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 78 ff.

Unsere vierkomponentigen Spinorfunktionen $\psi(x)$ gehören also zu einer Darstellung, die *reduzibel* ist bezüglich der eigentlichen LORENTZ-Gruppe. Die Darstellung wird aber irreduzibel, wenn wir nun außerdem die PAULI–GÜRSEY-Gruppe (Isospingruppe) betrachten. Unsere vierkomponentigen Feldfunktionen sind also WEYL-Isospinoren, d. h. gewissermaßen zweikomponentige Spinorfunktionen, deren Komponentenzahl bei der Einführung des Isospins in der üblichen Weise verdoppelt wurde.

Daß wir es bei den Feldfunktionen ψ im wesentlichen mit WEYL-Isospinoren zu tun haben, wurde schon in (I) betont. In der bisherigen Schreibweise wird jedoch dieser Sachverhalt auf doppelte Weise verdunkelt:

1. Die erwartete übliche Isospintransformation $\psi \to \exp(i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau})\,\psi$ tritt hier in der ungewohnten Form der PAULI–GÜRSEY-Transformationen auf.

2. Die γ in der Differentialgleichung (1) legen den Gedanken nahe, daß wir es mit den γ-Matrizen der DIRAC-Gleichung zu tun haben.

Unsere γ haben jedoch nur die algebraischen Eigenschaften mit den DIRAC-γ gemein. Die γ der DIRAC-Gleichung stehen in Beziehung zu der vierdimensionalen irreduziblen Darstellung der vollen LORENTZ-Gruppe. Diese Darstellung besteht im wesentlichen aus der direkten Summe zweier zweidimensionaler Darstellungen der eigentlichen LORENTZ-Gruppe, die durch die Spiegelungsgruppe miteinander verkoppelt werden. Wir schreiben deshalb für die DIRAC-γ oft das direkte Produkt $\gamma \sim \varrho \times \sigma$, wobei nun der ϱ-Raum (z. B. $\gamma_4 = \varrho_1 \times I$) mit der Raumspiegelung zusammenhängt.

Die γ hier gehören dagegen, wie wir gesehen haben, zu der vierdimensionalen irreduziblen Darstellung der eigentlichen LORENTZ-Gruppe mal Isospingruppe, d. h. im wesentlichen zu einer Darstellung im Spin-Isospinraum $\gamma \sim \tau \times \sigma$. Das wird jedoch in dieser Schreibweise nicht deutlich. Wir wollen deshalb die Differentialgleichungen (1) umschreiben. An Stelle der $\psi(x)$ und $\psi^*(x)$ führen wir die neuen vierkomponentigen Feldoperatoren $\chi(x) = \begin{pmatrix} R\,\psi(x) \\ R\,\psi^C(x) \end{pmatrix}$ und $\chi^*(x)$ ein, wobei

$$R\,\psi^C(x) = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\,\psi^C = C^{-1}\,\gamma_4\,(\psi^*\,L)^T$$

die Linkskomponenten des zu ψ hermitesch konjugierten Operators enthält. Eine Darstellung durch $\chi(x)$ und $\chi^*(x)$ ist der durch $\psi(x)$ und $\psi^*(x)$ vollkommen äquivalent.

Für die χ und χ^* gelten nun, wie man leicht nachrechnen kann, die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &-i\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,I_{\varrho\sigma}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\chi_{\beta,\sigma}\pm l^2\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,I_{\varrho\sigma}\,\chi_{\beta,\sigma} \\ &\qquad\cdot[\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,I_{\varkappa\lambda}\,\chi_{\delta,\lambda}]=0\,, \\ &+i\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,I_{\varrho\sigma}\pm l^2\,\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,I_{\varrho\sigma} \\ &\qquad\cdot[\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,I_{\varkappa\lambda}\,\chi_{\delta,\lambda}]=0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Gleichungen lassen sich formal als EULERsche Gleichungen aus einer LAGRANGE-Dichtefunktion

$$L=\frac{i}{2}\left[\chi^*\,\sigma^{\mu}\,I\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\chi\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\chi^*\right)\sigma^{\mu}\,I\,\chi\right] \mp\frac{l^2}{2}\,[\chi^*\,\sigma^{\mu}\,I\,\chi]\,[\chi^*\,\sigma_{\mu}\,I\,\chi] \tag{6}$$

ableiten. Hierbei haben wir die übliche Darstellung gewählt: $\sigma_{\mu}=(I,\vec{\sigma})$ mit $\vec{\sigma}$ die HERMITEschen PAULI-matrizen und I die Einheit im Spinraum, $\sigma^{\mu}=g^{\mu\nu}\,\sigma_{\nu}=(-I,\vec{\sigma})$, d. h. $g^{11}=g^{22}=g^{33}=-g^{00}=+1$. Summiert wird jetzt, im Gegensatz zu (I), von 0 bis 3, d. h. z. B.

$$\sigma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\sum_{\mu=0}^{3}\sigma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=-\frac{\partial}{\partial x^0}+\vec{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\,.$$

Die eigentlichen LORENTZ-Transformationen

$$\chi(x)\rightarrow\exp\left\{\alpha_{\mu\nu}\left[\frac{1}{4}\,\sigma^{\mu}\,\sigma^{\nu}+x^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\right]\right\} \cdot\exp\left\{\alpha^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right\}\chi(x)\,, \tag{7}$$

wo $\alpha_{\mu\nu}=-\alpha_{\nu\mu}$, α^{μ} zehn reelle willkürliche Parameter bedeuten, lassen die Differentialgleichung invariant, wie man leicht einsieht, wenn man beachtet, daß $(\chi^*\,\sigma^{\mu}\,\chi)$ sich wie ein kovarianter Vierervektor transformiert.

Die I in der Differentialgleichung bedeuten Einheitsmatrizen, in dem durch die Aufspaltung $\begin{pmatrix} R\,\psi \\ R\,\psi^{\mathrm{C}}\end{pmatrix}$ definierten Raum. Dieser Raum ist nun mit dem Isospinraum zu identifizieren, denn die PAULI–GÜRSEY-Transformationen (3) haben in diesem Raum wieder die übliche Form

$$\chi\rightarrow\exp(i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau})\;\chi\,,\quad \chi^*\rightarrow\chi^*\exp(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau})\,, \tag{8}$$

wenn man die PAULI-Matrizen in diesem Raum mit $\vec{\tau}$ bezeichnet. Die TOUSCHEK-Transformation (4) lautet jetzt:

$$\chi\rightarrow\exp(i\,\alpha)\;\chi\,,\quad \chi^*\rightarrow\chi^*\exp(-i\,\alpha)\,. \tag{9}$$

Die Invarianz der Differentialgleichung gegenüber diesen Transformationen ist evident.

Diese Darstellung ist offensichtlich eng verwandt mit einer von SCHREMP und GÜRSEY [6] verwendeten Darstellung. Bei diesen Autoren sind die Feldoperatoren in Quarternionenform durch 2×2 Matrizen gegeben, und zwar im wesentlichen in unserer Schreibweise durch $(R\,\psi,\,R\,\psi^{\mathrm{C}})=(:\,:)$. Die LORENTZ-Transformationen wirken bei ihnen von links auf diese Matrizen, die Isospintransformationen aber von rechts. Da für die praktische Rechnung die Anwendung von Operationen von zwei Seiten auf die Feldfunktion nicht sehr praktisch oder zumindest ungewohnt ist, hat sich diese Darstellung nicht gegen die PAULIsche Darstellung durchgesetzt, die nur die gewohnte Anwendung von DIRAC-Matrizen erfordert, trotz der dafür relativ komplizierten Darstellung der Isospintransformation. Die hier gewählte Darstellung schreibt statt der SCHREMP–GÜRSEY-2×2-Matrizen den Feldoperator in der gewohnten Spaltendarstellung und vereinigt so die Vorzüge des nur von links Multiplizierens mit der Einfachheit der Darstellung der Isospintransformation. Die Paritätsoperation (2) entpuppt sich jetzt, wenn wir speziell für C^{-1} die Darstellung $\gamma_2\,\gamma_4$ wählen, als die Transformation

$$\chi(\mathfrak{r},t)\rightarrow(-i\,\tau_2)\,(i\,\sigma_2)\;\chi^{*\mathrm{T}}(-\mathfrak{r},t)\,. \tag{10}$$

Sie entspricht, wie schon früher bemerkt, einer Art PC-Transformation (genauer gesagt einer PG-Transformation [7]). Man könnte vielleicht vermuten, daß es noch andere nichtlineare Ausdrücke gibt, die ebenfalls LORENTZ- und isoinvariant sind, so neben dem Ausdruck in (6)

$$(\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,I_{\varrho\sigma}\,\chi_{\beta,\sigma})\,(\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,I_{\varkappa\lambda}\,\chi_{\delta,\lambda}) \tag{11}$$

auch die Formen

$$(\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\tau^{\nu}_{\varrho\sigma}\,\chi_{\beta,\sigma})\,(\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,\tau_{\nu,\varkappa\lambda}\,\chi_{\delta,\lambda})\,, \tag{12}$$

$$(\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\tau^{i}_{\varrho\sigma}\,\chi_{\beta,\sigma})\,(\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,\tau_{i,\varkappa\lambda}\,\chi_{\delta,\lambda}) \tag{13}$$

und auch

$$\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\chi_{\beta,\sigma}\,\tau^{\nu}_{\varkappa\sigma}\,\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,\chi_{\delta,\lambda}\,\tau_{\nu,\varrho\lambda}\,, \tag{14}$$

$$\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\chi_{\beta,\sigma}\,I_{\varkappa\sigma}\,\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,\chi_{\delta,\lambda}\,I_{\varrho\lambda}\,, \tag{15}$$

$$\chi^*_{\alpha,\varrho}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\chi_{\beta,\sigma}\,\tau^{i}_{\varkappa\sigma}\,\chi^*_{\gamma,\varkappa}\,\sigma_{\mu,\gamma\delta}\,\chi_{\delta,\lambda}\,\tau_{i,\varrho\lambda}\,. \tag{16}$$

Es läßt sich jedoch durch FIERZ-Transformationen für antikommutierende χ leicht feststellen, daß die

[6] E. J. SCHREMP, Phys. Rev. **99**, 1603 [1955]. — F. GÜRSEY, Nuovo Cim. **3**, 988 [1956].

[7] Die G-Transformation wird hier in der Terminologie von T. D. LEE u. C. N. YANG, Nuovo Cim. **3**, 749 [1956] gebraucht.

Ausdrücke (12) und (14) identisch verschwinden und somit die Ausdrücke (11) und (13) und (15) und (16) je einander gleich sind. Da sich auf ähnliche Weise auch nachweisen läßt, daß Ausdruck (15) mit (11) identisch ist, so kommen wir zum Schluß, daß tatsächlich (11) der einzige nichtverschwindende nichtlineare Ausdruck ist, den man allerdings nach Belieben auch wie (13), (15) oder (16) schreiben kann. Verwendet man insbesondere die Schreibweise (13)

$$(\chi^* \sigma^\mu \tau^i \chi)(\chi^* \sigma_\mu \tau_i \chi) = (\chi^* \sigma^\mu \tau_+ \chi)(\chi^* \sigma_\mu \tau_- \chi) + (\chi^* \sigma^\mu \tau_3 \chi)(\chi^* \sigma_\mu \tau_3 \chi) \qquad (17)$$

mit $\tau_\pm = \tau_1 \pm i\,\tau_2$, so erkennt man, daß das nichtlineare Glied der Differentialgleichung im wesentlichen mit dem üblichen Ansatz einer $(V-A)$-Kopplung bei den schwachen Wechselwirkungen übereinstimmt, worauf schon in (I) hingewiesen wurde. Wegen der einfacheren rechnerischen Behandlung werden wir künftig jedoch immer die Darstellung (11) des nichtlinearen Gliedes wählen und werden dann auch, sofern keine Gefahr für ein Mißverständnis besteht, die Einheitsmatrix im Isospinraum in der Schreibweise unterdrücken, also die Differentialgleichung (5) kurz schreiben

$$-i\,\sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\chi \pm l^2 \sigma^\mu \chi (\chi^* \sigma_\mu \chi) = 0\,,$$
$$+i\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\chi^* \sigma^\mu \pm l^2 \chi^* \sigma^\mu (\chi^* \sigma_\mu \chi) = 0 \qquad (18)$$

Die Vakuum-Zweipunktfunktionen der χ müssen aus Invarianzgründen die allgemeine Form haben

$$\langle 0 | \chi_{\alpha,\varkappa}(x)\, \chi^*_{\beta,\lambda}(x') | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \varrho(\zeta)\, d\zeta \qquad (19)$$
$$\cdot \int d^4p\, e^{i\,p(x-x')} \frac{\bar\sigma^\mu_{\alpha\beta}\, p_\mu}{p^2+\zeta} I_{\varkappa\lambda}\,,$$

$\bar\sigma^\mu p_\mu$ ist hierbei bis auf einen Faktor

$$\det(\sigma^\mu p_\mu) = -p_\mu p^\mu = -p^2$$

die zu $\sigma^\mu p_\mu$ reziproke Matrix, d. h.

$$(\bar\sigma^\mu p_\mu)(\sigma^\nu p_\nu) = \det(\sigma^\nu p_\nu)\,.$$

Ist $\sigma_\mu = (I, \vec\sigma)$, so ist [8] $\bar\sigma_\mu = (I, -\vec\sigma)$. Die speziellen Vakuumerwartungswerte lassen sich aus (19) wieder auf die übliche Art durch geeignete Wahl des Integrationsweges in der komplexen p^0-Ebene gewinnen. Existieren asymptotisch irgendwelche stabilen Teilchen der Masse $\varkappa$, so muß in der Massenfunktion eine δ-Funktion für $\zeta = \varkappa^2$ auftreten.

Stabile Teilchen, die im Prinzip aus einer solchen Theorie resultieren können, müssen entweder, im Falle verschwindender Ruhmasse, der Neutrinogleichung genügen

$$\sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma_\mu p^\mu \varphi = 0 \qquad (20)$$

oder, im Falle von endlicher Masse, einer Spinor-KLEIN–GORDON-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\, \partial x^\mu} - \varkappa^2\right)\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad (p^2+\varkappa^2)\,\varphi = 0\,. \qquad (21)$$

Die Einteilchenfunktionen $\varphi(x)$ sind hierbei vierkomponentige WEYL-Isospinfunktionen, die durch geeignete Grenzbedingungen (Asymptotenbedingungen) aus den Einteilchenmatrixelementen $\langle 0 | \chi(x) | 1 \rangle$ des Feldoperators $\chi(x)$ entstehen.

Die Differentialgleichungen 2. Ordnung (21) für Teilchen endlicher Masse besitzen noch eine weitere Symmetrie, nämlich eine Symmetrie zwischen $\varphi(\mathfrak{r}, t)$ und $\frac{\bar\sigma_\mu p^\mu}{\varkappa}\varphi(-\mathfrak{r}, t) \equiv \tilde\varphi(-\mathfrak{r}, t)$ (s. Anm. [9]). Dies sehen wir am einfachsten durch eine Zerlegung der KLEIN–GORDON-Gleichung in das gekoppelte Gleichungssystem

$$\sigma_\mu p^\mu \varphi(\mathfrak{r}, t) = \varkappa\, \tilde\varphi(\mathfrak{r}, t)$$
$$\text{bzw.}\quad \bar\sigma_\mu p^\mu \varphi(-\mathfrak{r}, t) = \varkappa\, \tilde\varphi(-\mathfrak{r}, t),$$
$$\bar\sigma_\mu p^\mu \tilde\varphi(\mathfrak{r}, t) = \varkappa\, \varphi(\mathfrak{r}, t) \qquad (22)$$
$$\text{bzw.}\quad \sigma_\mu p^\mu \tilde\varphi(-\mathfrak{r}, t) = \varkappa\, \varphi(-\mathfrak{r}, t)\,.$$

Eine Symmetrieoperation, die $\varphi(\mathfrak{r}, t)$ und $\tilde\varphi(-\mathfrak{r}, t)$ miteinander vertauscht, läßt das Gleichungspaar und somit die KLEIN–GORDON-Gleichung invariant. Dies erlaubt nun die Definition einer Parität und bietet ferner die Möglichkeit, die KLEIN–GORDON-Gleichung für die vierkomponentigen φ-Funktionen in eine

[8] B. L. VAN DER WAERDEN [5], S. 83. Es entspricht hier
$$\sigma_\mu \to \sigma_{k,\alpha\dot\beta} \quad \text{und} \quad \bar\sigma_\mu \to \sigma_k'^{\dot\alpha\beta}\,.$$

[9] Diese Symmetrie ist analog, aber nicht identisch, der Symmetrie zwischen $\varphi(x)$ und $\hat\varphi(x)$ in der Bezeichnungsweise von (I). Genauer gesagt entspricht unser jetziges $\tilde\varphi(-\mathfrak{r}, t)$ in der früheren Bezeichnungsweise dem
$$\gamma_5 \frac{\gamma_\mu\, \partial/\partial x_\mu}{\varkappa} \gamma_4\, \varphi(-\mathfrak{r}, t),$$
also im wesentlichen dem entsprechend der Vorschrift „Parität 2. Art" transformierten $\varphi(\mathfrak{r}, t)$. Das noch zusätzlich auftretende γ_5 bewirkt gerade, daß diese „Parität 3. Art" nun genau der konventionellen Definition entspricht, die den Komponenten eines Isomultipletts, also z. B. dem Proton und Neutron und den drei π-Mesonen, je die gleiche Eigenparität zuordnet. Die Parität 2. Art lieferte für Proton und Neutron die entgegengesetzte Eigenparität.

DIRAC-Gleichung für die achtkomponentigen Spinorfunktionen $\Phi(\mathfrak{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathfrak{r}, t) \\ \tilde{\varphi}(\mathfrak{r}, t) \end{pmatrix}$ umzuwandeln.

$$\begin{pmatrix} \sigma_\mu p^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\mu p^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} \tag{23}$$

oder

$$(i \Gamma_\mu p^\mu + \varkappa) \, \Phi = 0 , \tag{24}$$

wenn wir

$$\Gamma_4 \Gamma_\mu = i \begin{pmatrix} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

setzen. Der achtkomponentige Spinor Φ verhält sich nun wie der bekannte, konventionelle DIRAC-Isospinor. Die Γ_μ sind die üblichen DIRAC-Matrizen, die wir hier jedoch mit großen Buchstaben bezeichnen, um eine Verwechslung mit den γ der Gl. (1) zu vermeiden. Der DIRAC-ϱ-Raum (z. B. in dieser Darstellung $\Gamma_4 = \varrho_1 \times I$, $\Gamma_5 = \varrho_3 \times I$ usw.), der erst die Darstellung der vollen LORENTZ-Gruppe ermöglicht, ist hier also mit dem Raum $\begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$ zu identifizieren.

Bestünde auch für unsere nichtlineare Differentialgleichung (18) eine Symmetrie ähnlicher Art, so ließe sich in der Tat wieder eine physikalisch brauchbare Parität bezüglich einer Raumspiegelung definieren, und diese wäre dann auch bei allen Wechselwirkungen streng erhalten. Bei Spinorfeldern mit Wechselwirkung müssen wir beachten, daß der Feldoperator $\chi(\mathfrak{r}, t)$ Matrixelemente liefert, die sich durch eine relative Eigenparität unterscheiden können. Zum Beispiel kann $\chi(\mathfrak{r}, t)$ von einem Vakuumzustand zu einem Nukleonzustand überführen, jedoch auch vom Vakuumzustand zu einem Zustand, in dem sich ein Nukleon und ein π-Meson, das eine negative Eigenparität hat, in einem relativen S-Zustand befinden. Schreiben wir

$$\chi(\mathfrak{r}, t) = \chi_+ (\mathfrak{r}, t) + \chi_- (\mathfrak{r}, t) ,$$

wobei nun $\chi_+(\mathfrak{r}, t)$ per definitionem nur nichtverschwindende Matrixelemente zwischen Zuständen der gleichen Eigenparität und $\chi_-(\mathfrak{r}, t)$ nur Matrixelemente zwischen Zuständen entgegengesetzter Eigenparität haben soll, so könnten wir z. B. eine Spiegelung zu definieren suchen durch

$$U_p \chi(\mathfrak{r}, t) \, U_p^{-1} = \tilde{\chi}(-\mathfrak{r}, t) = \frac{\bar{\sigma}_\mu p^\mu}{\sqrt{-p^2}} \cdot [\chi_+(-\mathfrak{r}, t) - \chi_-(-\mathfrak{r}, t)]. \tag{26}$$

Dieser Spiegelungsoperator U_p hätte jedenfalls die Eigenschaft $U_p^2 = 1$ und stimmt im Falle der freien Teilchen mit Masse $\sqrt{-p^2} = \varkappa$, für die $\chi_-(\mathfrak{r}, t) = 0$ und $\bar{\sigma}_\mu p^\mu / \sqrt{-p^2} = \bar{\sigma}_\mu p^\mu / \varkappa$ wird, mit der weiter oben diskutierten Definition an den Einteilchenmatrixelementen überein. Der Operator U_p wäre jedoch dadurch noch nicht eindeutig festgelegt, da wir $1/\sqrt{-p^2}$ auf verschiedene Weisen analytisch in die raumartigen und negativ zeitartigen Bereiche des Impulses p fortsetzen können. Auch wird $\bar{\sigma}_\mu p^\mu / \sqrt{-p^2}$ auf dem Lichtkegel im Impulsraum unbestimmt (Ruhmasse 0) und müßte dort noch irgendwie festgelegt werden (z. B. daß es dort Null sein soll, oder ähnliches). Der Operator $\bar{\sigma}_\mu p^\mu / \sqrt{-p^2}$ hat nur im Impulsraum einen unmittelbaren Sinn. Es läßt sich jedoch auch eine Darstellung im Ortsraum angeben. Wie leicht einzusehen ist, entspricht er dort einem Integraloperator

$$\tilde{\chi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \sigma_\mu (x^\mu - x'^\mu) \, f[(x - x')^2] \chi(x') \, d^4x' . \tag{27}$$

Bei der speziellen Festsetzung

$$\frac{1}{\sqrt{-p^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{[(p_0 + i\varepsilon)^2 - \mathfrak{p}^2]^{1/2}}$$

erhält man z. B. (mit der Abkürzung $s = t^2 - \mathfrak{r}^2$) $f(-s) = \frac{6}{s^{5/2}} \Theta(t - r)$ + Glieder, die nur auf dem Lichtkegel auftreten und noch von den speziellen Festsetzungen über das Verhalten von $\bar{\sigma}_\mu p^\mu / \sqrt{-p^2}$ bei $p^2 = 0$ abhängen [10]. Es läßt sich allerdings nicht einsehen, wie die Differentialgleichung (18) gegenüber einer solchen nichtlokalen Transformation $\chi(\mathfrak{r}, t) \to \tilde{\chi}(-\mathfrak{r}, t)$, wo $\tilde{\chi}(-\mathfrak{r}, t)$ etwa nach obiger Vorschrift konstruiert wird, invariant sein kann. Daher ist auch die Existenz des Operators U_p im HILBERT-Raum zweifelhaft. In einer Näherung jedoch, in der wir uns nur für die paritätserhaltenden Wechselwirkungen interessieren (vgl. I, S. 457 ff.) — wir können einstweilen noch nicht entscheiden, wie weit diese Näherung reicht —, sollte es erlaubt sein, die nichtlineare Gleichung in χ näherungsweise durch eine andere zu ersetzen, in der wir in $\chi(\mathfrak{r}, t)$ und $\tilde{\chi}(\mathfrak{r}, t)$ symmetrisiert haben. Diese Symmetrisierung kann am besten durch die Einführung eines achtkomponentigen Spinors

$$X(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \tilde{\chi}(x) \end{pmatrix} \tag{28}$$

formuliert werden, der nun der konventionellen Darstellung eines DIRAC-Isospinfeldoperators entspricht.

[10] $\Theta(z)$ ist die bekannte Stufenfunktion

$$\Theta(z) = \begin{cases} +1 & \text{für } z > 0 , \\ 0 & \text{für } z < 0 . \end{cases}$$

Für die Differentialgleichung erhalten wir eine DIRAC-artige Gleichung, wenn wir, wie oben, den durch $\begin{pmatrix}\chi\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix}$ gekennzeichneten Raum sinngemäß mit dem DIRAC-ϱ-Raum identifizieren

$$\Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} X \pm l^2 [a_1 \Gamma_5 \Gamma^\mu X(\bar{X} \Gamma_5 \Gamma_\mu X) + a_2 \Gamma^\mu X(\bar{X} \Gamma_\mu X)] = 0 \tag{29}$$

und eine entsprechende Gleichung für den adjungierten Feldoperator $\bar{X} = X^* \Gamma_4$. Da die Komponenten des Feldoperators, $\chi(x)$ und $\tilde{\chi}(x)$, jedoch nicht voneinander unabhängig sind, muß $X(x)$ noch einer Nebenbedingung genügen, welche etwa die Form hat $\Gamma_4 \Gamma_\mu f^\mu(\bar{X}, X) = \Gamma_4 g(\bar{X}, X)$. Diese Nebenbedingung schränkt nun die zulässigen Transformationen an X ein. So stellen wir z. B. fest, daß die TOUSCHEK-Transformation mit dem DIRAC-Γ_5 (dies war die ursprüngliche Auffassung der TOUSCHEK-Transformation)

$$X \to e^{i\alpha\Gamma_5} X, \qquad \bar{X} \to \bar{X} e^{i\alpha\Gamma_5} \tag{30}$$

die Differentialgleichung (29) wohl invariant läßt, mit der Nebenbedingung jedoch nicht verträglich und so auf die Theorie nicht anwendbar ist. Dies führt dazu, daß hier auch einfache, nichtentartete Lösungen mit endlicher Masse zu erwarten sind, im Gegensatz zu irgendeiner [im Sinne (30)] TOUSCHEK-invarianten Theorie, z. B. der Art (29), die keine Nebenbedingung an den Operator X stellt[11].

Nach der Symmetrisierung erhalten wir im allgemeinen Fall also ein Gemisch aus einer Vektor- und Axialvektorkopplung, deren Kopplungsverhältnis noch davon abhängt, auf welche genaue Art und Weise die Symmetrie zwischen $\chi(\mathfrak{r}, t)$ und $\tilde{\chi}(-\mathfrak{r}, t)$ zustande kommt. Dies läßt sich nicht allgemein entscheiden.

Die Mittelung zwischen $\chi(\mathfrak{r}, t)$ und $\tilde{\chi}(-\mathfrak{r}, t)$ entspricht in (I) im wesentlichen der Mittelung über $\psi(x)$ und $\hat{\psi}(x)$ und der Einführung des Σ-Raums. Die in (I, 82) angegebene symmetrisierte Wellengleichung war jedoch nicht die allgemeinste, sondern sie entspricht hier dem Sonderfall $a_2 = 0$ und $a_1 = \frac{1}{2}$ (s. Anm. [12]). Wir können leicht feststellen, daß in (I) auch ein nichtlineares Glied

$$\gamma_5 \gamma_\mu \Sigma_3 \Psi(\bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu \Sigma_3 \Psi),$$

und in (I, 89) ein

$$O^{(1)} = \gamma_5 \gamma_\mu - \frac{i\gamma_\nu (p_\nu - \frac{1}{2} k_\nu)}{|p - \frac{1}{2} k|} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i\gamma_\varrho (p_\varrho + \frac{1}{2} k_\varrho)}{|p + \frac{1}{2} k|}$$

allen Anforderungen genügt. Diese Ausdrücke führen zu den Vektorkopplungsgliedern ($a_2 \neq 0$).

Der in (I) behandelte Sonderfall $a_2 = 0$ zeichnet sich vor den anderen Möglichkeiten $a_2 \neq 0$ allerdings dadurch aus, daß die Differentialgleichung invariant wird unter einer neuen PAULI–GÜRSEY-Tranformation, nämlich der Form

$$\begin{aligned} X &\to a\, X + b(i\tau_2)\, C^{-1} \bar{X}^{\mathrm{T}} \\ \bar{X} &\to a^* \bar{X} + b^* X^{\mathrm{T}} C (i\tau_2) \end{aligned} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{31}$$

(mit C^{-1} der Ladungskonjugationsmatrix im Raume der DIRAC-Γ). Diese neue Rotationsgruppe führt zu einer gewissen Symmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen, auf Grund derer, wie wir im Abschnitt IV sehen werden, z. B. das Deuteron (Nukleon – Nukleon-System) sich wie ein π-Meson (Nukleon – Antinukleon-System) verhält. Der Sonderfall $a_2 = 0$ ist also physikalisch nicht zulässig und soll im folgenden nur diskutiert werden, um die Verbindung mit (I) herzustellen.

Die Vakuum-Zweipunktfunktionen für die achtkomponentigen Operatorfunktionen X lassen sich – analog wie in (I) – in einer Näherung, bei der wir uns auf den Beitrag des Pols zur Nukleonenmasse beschränken, durch Anwendung des Operators $\sigma_\mu p^\mu / \sqrt{-p^2}$ aus den Vakuum-Zweipunktfunktionen (19) des vierkomponentigen Feldoperators χ gewinnen. Nach Abzug der δ- und δ'-Funktionen auf dem Lichtkegel (Regularisierung durch einen Dipolgeist) erhält man die Form

$$\langle 0 | X_{\alpha,\varkappa}(x)\, \bar{X}_{\beta,\lambda}(x') | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 p\, e^{i p (x-x')} \cdot \left[\frac{\Gamma_{\mu,\alpha\beta}\, p^\mu \varkappa^4}{(p^2)^2 (p^2 + \varkappa^2)} - \frac{i \varkappa^3 \delta_{\alpha\beta}}{(p^2)(p^2+\varkappa^2)} \right] I_{\varkappa\lambda}, \tag{32}$$

aus der sich die speziellen Vakuumfunktionen wieder durch geeignete Wahl des Integrationsweges in

[11] Zum Beispiel ließe sich die Behauptung, die Masse des Elektrons könne nicht rein elektromagnetischer Natur sein, da sowohl die masselose DIRAC-Gleichung als auch die vektorielle elektromagnetische Wechselwirkung gegenüber der TOUSCHEK-Transformation invariant sind, schon nicht mehr aufrechterhalten, wenn Nebenbedingungen ähnlicher Art existieren.

[12] Daß dem in (I) behandelten Fall $a_1 = \frac{1}{2}$, und nicht $a_1 = 1$ entspricht, rührt daher, daß wir hier $X = \begin{pmatrix}\chi\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix}$, dort jedoch $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}\psi\\ \hat{\psi}\end{pmatrix}$ definiert haben. Dadurch tritt der Faktor $\frac{1}{2}$ dort nicht in der Differentialgleichung vor dem nichtlinearen Glied auf, erscheint dafür aber in der Vertauschungsfunktion, im Gegensatz zum jetzigen Fall.

der komplexen p^0-Ebene ergeben. Die Funktion (32) entspricht genau der Vakuum-Zweipunktfunktion eines freien DIRAC-Teilchens mit Isospin $\frac{1}{2}$, Masse $\varkappa$ und Geisterdipolregularisierung, wie sie in den früheren HEISENBERGschen Arbeiten [13] (dort allerdings ohne Isospin) verwendet wurde. Sie stimmt im wesentlichen mit der in (I, 91) angegebenen Vakuumfunktion überein [14].

II. l-Inversion und Parität

Im vorigen Abschnitt haben wir eine Operation der Raumspiegelung eingeführt, welche die richtigen Vertauschungseigenschaften mit den anderen Symmetrieoperationen besitzt, die jedoch die Differentialgleichung nicht mehr, oder nur näherungsweise invariant läßt. Die Differentialgleichung ist nur gegenüber einer PC-Transformation streng invariant. Es erhebt sich nun selbstverständlich die Frage, inwieweit eine solche unvollkommene Raumspiegelungsinvarianz zur Beschreibung der Elementarteilchen wirklich ausreicht, deren starke und elektromagnetische Wechselwirkungen, wie wir wissen, die Parität streng erhalten. Die Untersuchungen einer Reihe von Autoren [15] haben gezeigt, daß bei YUKAWA-Kopplung der π-Mesonen und Photonen an die Nukleonen, vermöge der Isospininvarianz bzw. der Eichinvarianz dieser Wechselwirkungen, die PC-Invarianz ausreicht, um auch die Paritätsinvarianz dieser Wechselwirkungen zu gewährleisten. Für die K-Mesonen lassen sich jedoch wohl nicht die gleichen oder ähnliche Argumente verwerten. Die Theorie würde in obiger Form also dann nicht in Widerspruch zur Erfahrung geraten, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt würden:

1. Die Theorie läßt π-Mesonen und Photonen als Lösungen zu;
2. Die Ankopplung der π-Mesonen und Photonen an die Nukleonen läßt sich in sehr guter Näherung durch eine Feldtheorie mit YUKAWA-Kopplung approximieren;
3. Die starken Wechselwirkungen lassen sich in sehr guter Näherung als Wechselwirkungen durch π-Mesonen beschreiben.

Die Voraussetzungen 2. und 3. sind wohl nicht streng erfüllt, denn die Wechselwirkung bei sehr kleinen Abständen (core) wird wegen der Eigenstruktur des π-Mesons bzw. des Photons nicht rein YUKAWA-artig sein. Dazu müssen bei kleinen Abständen auch die K-Mesonen mitberücksichtigt werden. Bei Wechselwirkungen mit dem „core" würden also Abweichungen von der Paritätserhaltung zu erwarten sein. Die hohe Genauigkeit einerseits, mit der die Erfahrung die Erhaltung der Parität bei starken und elektromagnetischen Wechselwirkungen bestätigt, und andererseits die letzten Experimente über die K-Mesonen-Wechselwirkungen [16], die keine Abweichung von der Spiegelungsinvarianz innerhalb der Fehlergrenzen anzudeuten scheinen, lassen uns daran zweifeln, ob eine solcherart eingeführte approximative Paritätssymmetrie dem experimentellen Sachverhalt gerecht werden kann [17].

Es soll hier deshalb der Versuch unternommen werden, die Raumspiegelungsgruppe in einer etwas anderen Form streng in die Theorie einzuführen und die beobachteten Abweichungen von dieser Symmetriegruppe bei den schwachen Wechselwirkungen dann später – ähnlich wie die Abweichungen der elektromagnetischen Wechselwirkungen von der strengen Isosymmetrie – als Folge des unsymmetrischen Grundzustandes „Welt" zu interpretieren. Es sei hier gleich bemerkt, daß die Einführung einer strengen Raumspiegelungsgruppe effektiv immer nur durch eine geeignete Verdopplung der Komponentenzahl des Feldoperators erreicht werden kann, da es eben, wie wir gesehen haben, nur vierdimensionale irreduzible Darstellungen der vollen LORENTZ-Gruppe gibt. Das Problem liegt also nicht darin, diese effektive Verdopplung zu vermeiden, sondern die Verdopplung derart einzuführen, daß die Zahl der möglichen invarianten Ausdrücke in den Feldoperatoren nicht erhöht wird. Wir wissen z. B., daß wir bei der üblichen Verdoppelung zu DIRAC-Spinoroperatoren gelangen, für die es schon fünf ver-

[13] W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. **9 a**, 292 [1954]. — W. HEISENBERG, F. KORTEL u. H. MITTER, Z. Naturforschg. **10 a**, 425 [1955]. — W. HEISENBERG, Rev. Mod. Phys. **29**, 269 [1957].

[14] Ein kleiner Unterschied besteht insofern, als wegen der in der Anm. [12] erörterten nichtäquivalenten Definition von X und Ψ der Faktor $\frac{1}{2}$ nicht mehr auftritt. Die jetzige Definition erscheint uns zweckmäßiger, da sie auf die konventionelle Form der Vertauschungsrelation führt. In der Gl. (91) in (I) hat sich dazu ein Druckfehler eingeschlichen: Vor dem Massenglied muß + statt – stehen. Gln. (92) und (133) sind richtig.

[15] G. FEINBERG, Phys. Rev. **108**, 878 [1957]. — S. N. GUPTA, Can. J. Phys. **35**, 1309 [1957]. — V. G. SOLOVEV, J. Exptl. Theoret. Phys. USSR **33**, 537, 769 [1957]. — M. GELL-MANN u. A. H. ROSENFELD, Ann. Rev. Nuclear Sci. **7**, 407 [1957]. — J. J. SAKURAI, Phys. Rev. **113**, 1679 [1959].

[16] F. S. CRAWFORD et al., Phys. Rev. Letters **1**, 209 [1958]; **2**, 11 [1959].

[17] W. THIRRING, Nucl. Physics **14**, 565 [1959/60].

schiedene invariante Ausdrücke vierten Grades gibt – nämlich die fünf FERMI-Wechselwirkungsglieder

$$(\bar{X} X)^2, (\bar{X} \Gamma_5 X)^2, \quad (\bar{X} \Gamma_\mu X)(\bar{X} \Gamma^\mu X),$$
$$(\bar{X} \Gamma_5 \Gamma_\mu X)(\bar{X} \Gamma_5 \Gamma^\mu X),$$
$$(\bar{X} \Gamma_{\mu\nu} X)(\bar{X} \Gamma^{\mu\nu} X) \; -$$

und die damit auch die Einführung von fünf Kopplungskonstanten nötig machen, im Gegensatz zu dem einzigen invarianten Ausdruck vierten Grades vor der Verdopplung. Die Einschränkung der Zahl der Wechselwirkungsglieder kann nur so zustande kommen, daß gewisse Beziehungen zwischen den Komponenten des verdoppelten Feldoperators gefordert werden. Wir wollen im folgenden eine Verdopplung studieren, welche eine solche Einschränkung automatisch liefert.

Wir erinnern uns zu diesem Zweck daran, daß die Gleichung einen Längenparameter l enthält, dessen Zahlwert physikalisch nicht festgelegt werden kann; daß es also – wie schon in (I, S. 448) ausgeführt wurde –, als naturgemäß erscheint, die ganze Schar der Gleichungen mit beliebigen l-Werten zu betrachten, die Operatoren daher als Funktionen der fünf Koordinaten x_ν, l aufzufassen und die Verbindung zwischen den Operatoren zu verschiedenen l-Werten durch die Vertauschungsfunktionen herzustellen. Wir stellen dann fest, daß sowohl die nichtlineare Differentialgleichung (18) als auch die KLEIN–GORDON-Gleichung (21) den Längenparameter l explizit nur in quadratischer Form enthalten. Beide sind deshalb gegenüber einer l-Inversion ($l \to -l$) invariant. Wir wollen im folgenden versuchen, diese Invarianzeigenschaft für die Raumspiegelungssymmetrie auszunutzen. Zu diesem Zweck studieren wir die Verhältnisse erst an der KLEIN–GORDON-Gleichung (21) für die Matrixelemente eines freien Spinorteilchens endlicher Masse.

Beim Studium der Skalentransformation wurde in (I) darauf hingewiesen, daß die Skalentransformation mit den raum-zeitlichen Translationen nur dann vertauschbar ist, wenn wir den infinitesimalen Translationsoperator als $p^\mu l = -i \frac{\partial}{\partial (x_\mu / l)}$ definieren. Die invarianten Massen ergeben sich dann als Zahlen $\mu = \varkappa l$. Die Einteilchenmatrixelemente waren Funktionen der Form $l^{\lambda - 3/2} \varphi(x/l)$, wo $\lambda = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \ldots$ mit der Leptonen- und Baryonenzahl in Verbindung stehen soll. Zwischen der l-Inversion und der Skalentransformation besteht die Ähnlichkeit, daß beide den Parameter l mit in die Transformation einbeziehen. Die folgende Erörterung der Frage, ob die l-Inversion nicht-trivialer oder trivialer Natur ist, d. h., ob sich aus der Invarianz unter l-Inversion Erhaltungsgrößen ableiten lassen, welche zur Charakterisierung physikalischer Systeme taugen bzw. nicht taugen, sind kennzeichnend für alle Transformationen, bei denen Parameter mittransformiert werden, und läßt sich z. B. auch auf die Skalentransformation übertragen. Da die l-Inversion ihrem Inhalt nach jedoch von der Skalentransformation unabhängig ist, wollen wir, der Einfachheit halber, im folgenden nur den Fall $\lambda = 0$ betrachten, der dann vorliegt, wenn die Skalentransformation trivial, d. h. physikalisch bedeutungslos ist.

Wir wollen zuerst eine Darstellung betrachten, in der alle Größen von der Dimension einer Länge auf die Länge l (und nicht auf ihren absoluten Betrag $|l|$) bezogen sind. Die Transformation $l \to -l$ würde dann nicht nur die Raumkoordinate $\vec{\xi} = \mathfrak{x}/l$ in ihr Spiegelbild überführen, sondern auch

$$x^0/l \to -x^0/l, \qquad \varkappa\, l \to -\varkappa\, l$$

und auch

$$p^0\, l = i \frac{\partial}{\partial (x^0/l)} \to -i \frac{\partial}{\partial (x^0/l)}$$

transformieren; d. h. aber: Ein bestimmtes System wird bei dieser Festsetzung in ein gespiegeltes System mit invertierter Zeitrichtung und entgegengesetzter Energie und Masse überführt. Wegen der Vorzeichenänderung der Energie ist die Transformation in dieser Form nicht brauchbar, da man die Energie in der üblichen Theorie stets als positiv definiert.

Wir können jedoch auch folgende andere Festsetzung treffen, ohne am Verhalten bei LORENTZ-Transformation und Skalentransformation etwas zu ändern: Alle zeitartigen Längen sollen auf $|l|$, alle raumartigen Längen jedoch auf l bezogen werden. Das heißt, wir definieren insbesondere den zeitlichen Translationsoperator als $q^0 = p^0 |l| = i \frac{\partial}{\partial (x^0/|l|)}$, die Massenzahl als $\mu = \varkappa |l|$ und schreiben folglich die dimensionslose Zeitkoordinate $\xi^0 = x^0/|l|$. Dadurch erreichen wir, daß die Energie und die Masse immer positiv gezählt werden, sofern p^0 und $\varkappa$ positiv sind. Für die Raumkoordinate setzen wir dagegen $\vec{\xi} = \mathfrak{x}/l$. Durch diese Unterscheidung von Raum- und Zeitkoordinaten wird nun das Vorzeichen von l

nichttrivial und führt durch die Unterscheidbarkeit von Feldoperatoren mit positivem und negativem l zu einer effektiven Verdopplung der Komponentenzahl des Feldoperators. Mathematisch spiegelt sich diese Verdopplung in dem Auftreten einer Vorzeichenfunktion $\varepsilon_l = l/|l|$ wider, die mit der l-Inversion nicht mehr vertauschbar ist.

Würde man auch die Raumkoordinate $\vec{\xi}$ durch $\vec{\xi} = \mathfrak{x}/|l|$ festlegen, so verschwindet der Unterschied in den Komponenten und wir haben effektiv keine Verdopplung mehr. Die Invarianz gegenüber l-Inversion ist dann wohl immer noch formal vorhanden, aber sie hat triviale Konsequenzen. Jeder Zustand hängt dann nur von l^2 ab und ist deshalb einfach entartet. Es gibt aber keine physikalische Unterscheidung mehr zwischen den beiden entarteten Zuständen, und wir zählen sie, ähnlich wie z. B. Zustände, die sich nur bezüglich ihrer Norm unterscheiden, physikalisch nur einfach.

Bei obiger Festsetzung jedoch wird ein System bei l-Inversion in sein bezüglich der Raumkoordinate gespiegeltes Ebenbild transformiert. Da die l-Inversion die Bewegungsgleichung des freien Spinorteilchens invariant läßt, führt sie somit bei dieser Festsetzung zur Definition einer Parität, die wir kurz l-Parität nennen wollen.

Wir haben auf der anderen Seite festgestellt, daß im Falle der freien Teilchen auch die Operation

$$\varphi(\mathfrak{x}, t) \rightarrow \tilde{\varphi}(-\mathfrak{x}, t) = \frac{\bar{\sigma}_\mu p^\mu}{\varkappa} \varphi(-\mathfrak{x}, t),$$

die wir jetzt kurz p-Spiegelung nennen wollen, als Raumspiegelungsoperation geeignet ist. Die Existenz zweier unabhängiger Raumspiegelungsoperationen führt zunächst dazu, daß nun jeder Zustand bezüglich der Parität (bzw. Helizität) vierfach entartet erscheint.

Um dies deutlich zu machen, zerlegen wir die Klein–Gordon-Gleichung (21) in das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} -i\,\sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_n(\varkappa, p^0; \mathfrak{x}, t, l) &= \varkappa \tilde{\varphi}_n(\varkappa, p^0; \mathfrak{x}, t, l), \\ -i\,\bar{\sigma}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{\varphi}_n(\varkappa, p^0; \mathfrak{x}, t, l) &= \varkappa \varphi_n(\varkappa, p^0; \mathfrak{x}, t, l). \end{aligned} \tag{33}$$

Hier bedeutet $\varphi_n(\varkappa, p^0; \mathfrak{x}, t, l)$ die Eigenfunktion eines Teilchens mit den Quantenzahlen n (Baryonenzahl, Drehimpuls etc.), der Masse $\varkappa$ und Energie p^0. $\tilde{\varphi}_n(\varkappa, p^0; \mathfrak{x}, t, l)$ ist durch die erste Gleichung definiert. Um die Abhängigkeit vom Parameter l hervorzuheben, wollen wir (33) schreiben

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial}{\partial \xi^0} - \varepsilon_l\, \vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) \varphi_n'(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l) &= \mu\, \tilde{\varphi}_n'(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l), \\ i\left(\frac{\partial}{\partial \xi^0} + \varepsilon_l\, \vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) \tilde{\varphi}_n'(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l) &= \mu\, \varphi_n'(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l), \end{aligned} \tag{33'}$$

wobei $\varepsilon_l = l/|l|$ bedeutet. Wir sehen nun sofort, daß die Funktionen

$$\varphi_n'(\vec{\xi}, \xi^0, l), \quad \tilde{\varphi}_n'(-\vec{\xi}, \xi^0, l) \quad \varphi_n'(-\vec{\xi}, \xi^0, -l) \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_n'(\vec{\xi}, \xi^0, -l)$$

alle derselben Differentialgleichung genügen. Sie unterscheiden sich durch die p- und l-Helizität.

Wir können den Entartungsgrad wieder auf zwei reduzieren, wenn wir die p- und l-Helizität miteinander identifizieren, z. B. durch die Bedingung

$$\tilde{\varphi}(\mathfrak{x}, t, l) = \varphi(-\mathfrak{x}, t, -l)$$

bzw.

$$\tilde{\varphi}'(\vec{\xi}, \xi^0, l) = \varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, -l). \tag{34}$$

Dies bedeutet, daß wir den Übergang

$$\varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, l) \rightarrow \tilde{\varphi}'(\vec{\xi}, \xi^0, l)$$

auf zwei verschiedene Weisen bewerkstelligen können:

1. Durch Anwendung des Operators $\frac{\sigma_\mu p^\mu}{\varkappa}$.
2. Durch Inversion $l \rightarrow -l$ und $\vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi}$ (bzw. $l \rightarrow -l$, $\mathfrak{x} \rightarrow -\mathfrak{x}$).

Im Anhang soll zur Veranschaulichung die explizite Form von Matrixelementen mit vorgegebenem Gesamtdrehimpuls angegeben und an ihnen die Identität der Operation 1. und 2. nachgewiesen werden.

Um die Bedeutung der Einschränkung (34) noch klarer hervorzuheben, soll eine Dirac-Schreibweise eingeführt werden. Wir definieren einen 8-komponentigen Spinor

$$\Phi(\xi, \xi_0, l) = \begin{pmatrix} \varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, l) \\ \varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, -l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathfrak{x}, t, l) \\ \varphi(-\mathfrak{x}, t, -l) \end{pmatrix} \tag{35}$$

und identifizieren nun den durch $\varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, l)$ und $\varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, -l)$ aufgespannten Raum mit dem Dirac-ϱ-Raum. Die l-Paritätsoperation läßt sich dann in der für die Dirac-Darstellung üblichen Form schreiben

$$\Phi(\xi, \xi^0, l) \rightarrow \Gamma_4\, \Phi(-\vec{\xi}, \xi^0, l), \tag{36}$$

wenn wir Γ_5 diagonal wählen. Nach dieser Verdopplung können wir uns jetzt auf die Betrachtung von $l = |l|$ beschränken. Für $\Phi(\vec{\xi}, \xi^0, l)$ gilt aber keine DIRAC-Gleichung, sondern immer noch eine KLEIN–GORDON-Gleichung

$$(p^2 + \varkappa^2)\,\Phi = (\Gamma_\nu\, p^\nu + i\,\varkappa)\,(\Gamma_\varrho\, p^\varrho - i\,\varkappa)\,\Phi = 0, \quad (37)$$

da wir ja noch immer die Entartung bezüglich Φ und $\tilde{\Phi}$ haben. Diese beiden Lösungen unterscheiden sich noch durch die p-Parität. Die Identifizierung von p- und l-Parität nach Art der Bedingung (34) bedeutet, daß nur Lösungen der Form

$$(\Gamma_\nu\, p^\nu - i\,\varkappa)\;\Phi = 0 \quad (38)$$

zugelassen werden. Die anderen Lösungen

$$(\Gamma_\nu\, p^\nu + i\,\varkappa)\;\Phi = 0$$

sind mit der Bedingung (34) nicht verträglich. Die Nebenbedingung (38) ist im Gegensatz zur Gleichung (37) nicht mehr invariant gegenüber einer TOUSCHEK-Transformation $\Phi \to e^{i\,\alpha\,\Gamma_5}\,\Phi$.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß sowohl die Anwendung der Operation $\frac{\sigma_\mu\, p^\mu}{\varkappa}$ als auch die l-Inversion im Falle von Teilchen der Masse Null auf Schwierigkeiten stößt; im ersteren Fall wird $\lim_{\varkappa \to 0} \frac{\sigma_\mu\, p^\mu}{\varkappa}$ unbestimmt, im zweiten Fall tritt kein l^2 mehr in der Differentialgleichung auf. Das Auftreten endlicher Massen und die Invarianz bei einer reinen Raumspiegelung bedingen sich wechselseitig. Bei verschwindender Ruhmasse braucht dagegen die Raumspiegelungsinvarianz auch nicht gefordert zu werden. Die enge Verknüpfung zwischen Masse und Parität mag rechtfertigen, daß wir die Verdopplung der Feldoperatoren im Zusammenhang mit der universellen Länge l durchgeführt haben, die doch in enger Beziehung zur Masse steht.

Wir wenden uns nun der nichtlinearen Differentialgleichung (18) zu. Führen wir auch hier die dimensionslosen Orts- und Zeitvariablen $\vec{\xi} = \mathfrak{x}/l$ bzw. $\xi^0 = x^0/|l|$ ein, so lautet die Gleichung

$$i\left(\frac{\partial}{\partial \xi^0} - \varepsilon_l\, \vec{\sigma}\, \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right)\chi \pm \varepsilon_l\, l^3\, \sigma^\mu\, \chi(\chi^*\, \sigma_\mu\, \chi) = 0\,. \quad (39)$$

Für χ^* finden wir eine entsprechende Gleichung. Nun können wir eine Transformation U_l im HILBERT-Raum durch die Bedingung

$$U_l\, \chi(\vec{\xi}, \xi^0, l)\; U_l^{-1} = \chi(-\vec{\xi}, \xi^0, -l) \quad (40)$$

definieren, da diese Transformation die nichtlineare Differentialgleichung (39) invariant läßt. Diese Invarianz gestattet uns die strenge Einführung einer l-Parität. Im Falle freier Felder läßt sich diese Parität, wie wir beim Studium der Einteilchenmatrixelemente gesehen haben, mit der p-Parität identifizieren. Eine solche Identifizierung wird jedoch für die allgemeinen Lösungen von (39) nicht mehr möglich sein, da die Gl. (39) bzw. (5) ja, wie früher bemerkt, gegenüber der p-Paritätsoperation gar nicht invariant ist.

Um uns die praktische Rechnung zu erleichtern, wollen wir wieder zu einer DIRAC-artigen Schreibweise übergehen. Definieren wir analog zu dem Vorgange an den Matrixelementen (35) einen 8-komponentigen Spinoroperator

$$X(\vec{\xi}, \xi^0, l) = \begin{pmatrix} \chi(\vec{\xi}, \xi^0, l) \\ \chi(\vec{\xi}, \xi^0, -l) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

so läßt sich die Raumspiegelung in der üblichen Form schreiben

$$X(\vec{\xi}, \xi^0, l) \to \Gamma_4\, X(-\vec{\xi}, \xi^0, l)\,, \quad (42)$$

und es läßt sich nun wieder ohne Einschränkung $l = |l|$ setzen. Die Differentialgl. für $X(\vec{\xi}, \xi^0, l)$ lautet dann, wenn wir (25) beachten

$$\Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} X \pm \tfrac{1}{2}\, l^3\, [\Gamma_5\, \Gamma^\mu\, X(\bar{X}\, \Gamma_5\, \Gamma_\mu\, X) \quad (43)$$
$$+ \Gamma^\mu\, X(\bar{X}\, \Gamma_\mu\, X)] = 0\,.$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für $\bar{X} = X^*\, \Gamma_4$. Führen wir wieder x^μ statt ξ^μ als Koordinate ein, dann erhalten wir eine Differentialgeichung der Form (29), in der jedoch die X wegen der verschiedenen Definitionen (28) bzw. (41) eine etwas andere Bedeutung haben. Im Gegensatz zu (29) gilt die Differentialgleichung (43) exakt und legt die Kopplungskonstanten für Vektor- und Axialvektorkopplung fest: $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Der Wechselwirkungsansatz bleibt also trotz der Verdopplung der Komponentenzahl des Feldoperators eindeutig.

Wir müssen nun noch prüfen, ob die weiter oben angegebenen Vakuumerwartungswerte (19) für die Feldoperatoren auch noch gegenüber der l-Spiegelung invariant sind. Dies läßt sich aber einfach zeigen. Dazu schreiben wir die Vakuum-Zweipunktfunktion (19) in den dimensionslosen Koordinaten

$$\langle 0\,|\, \chi_{\alpha,\varkappa}(\xi, l)\; \chi^*_{\beta,\lambda}(\xi', l)\,|\, 0\rangle = \frac{i}{(2\,\pi)^4}\, \frac{\varepsilon l}{l^3} \int \varrho(\zeta)\, d\zeta$$
$$\cdot \int d^4 q\; e^{i\,q(\xi - \xi')}\, \frac{q_0\, I_{\alpha\beta} + \varepsilon_l\, \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\, \mathfrak{q}}{q^2 + \zeta}\, I_{\varkappa\lambda}\,, \quad (44)$$

$\varrho(\zeta)$ bedeutet jetzt das Spektrum der dimensionslosen Massenquadrate μ^2. Die Invarianz gegenüber l-Inversion ($l \to -l$, $\vec{\xi} \to -\vec{\xi}$) ist offensichtlich. Da sich die Zeitkoordinate ξ^0 bei dieser Transformation nicht umdreht, bleiben auch die Verhältnisse in der komplexen q^0-Ebene ungeändert. Alle speziellen Vakuum-Zweipunktfunktionen (z. B. die Vertauschungsfunktion), die nach den üblichen Vorschriften über den Integrationsweg gewonnen werden, bleiben deshalb ebenfalls invariant.

Wir wollen auch hier wieder zu der bequemeren DIRAC-Schreibweise übergehen, indem wir den verdoppelten Spinor (41) einführen und uns dann auf positive l beschränken. Hierzu betrachten wir zuerst einmal den Fall des freien WEYL-Feldes, setzen also speziell $\varrho(\zeta) = \delta(\zeta - \mu^2)$. Auf Grund unserer früheren Betrachtungen über die Einteilchenmatrixelemente finden wir den Γ_5-invarianten Ausdruck

$$\langle 0 | X(\xi, l)\, \bar{X}(\xi', l) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^3} \int \mathrm{d}^4 q\, e^{i q(\xi - \xi')} \frac{\Gamma_\mu q^\mu}{q^2 + \mu^2} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^3} \int \mathrm{d}^4 q\, e^{i q(\xi - \xi')} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\Gamma_\mu q^\mu + i\mu}{q^2 + \mu^2} + \frac{\Gamma_\mu q^\mu - i\mu}{q^2 + \mu^2} \right],$$

wenn wir *keine* Nebenbedingung der Art (38) fordern. Fordern wir dagegen diese Nebenbedingung, so erhalten wir statt dessen

$$\langle 0 | X(\xi, l)\, X(\xi', l) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^3} \int \mathrm{d}^4 q\, e^{i q(\xi - \xi')} \frac{\Gamma_\mu q^\mu + i\mu}{q^2 + \mu^2}. \tag{46}$$

Da die nichtlineare Wellengleichung (39) invariant ist gegenüber der Transformation $\chi \to e^{i \alpha \varepsilon_l} \chi$, bzw. Gl. (43) invariant gegenüber der TOUSCHEK-Transformation $X \to e^{i \alpha \Gamma_5} X$, kann man zunächst auch für den Feldoperator $X(\xi, l)$ (ähnlich wie im Falle des freien WEYL-Feldes) Γ_5-invariante Vakuumerwartungswerte der Form (43) mit einer beliebigen Massenspektralfunktion konstruieren. Dies würde aber bedeuten, daß alle Nukleonen in zwei Ausführungen vorkommen, die sich durch die Eigenparität unterscheiden. Dies steht mit der Erfahrung in Widerspruch. Wir können aber, ähnlich wie im Falle des freien WEYL-Feldes, die effektive Verdopplung der Zustände durch eine Nebenbedingung rückgängig machen, indem wir fordern: Die Nukleonen sollen nur in der einen Ausführung vorkommen, die eine DIRAC-Gleichung der Art (38) erfüllen; d. h., die Vakuumerwartungswerte sollen die Form haben

$$\langle 0 | X(\xi, l)\, X(\xi', l) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^3} \int \mathrm{d}\zeta \int \mathrm{d}^4 q\, e^{i q(\xi - \xi')} \cdot \left[\frac{\Gamma_\mu q^\mu + i \zeta^{1/2}}{q^2 + \zeta} \varrho_1(\zeta) + \frac{\Gamma_\mu q^\mu - i \zeta^{1/2}}{q^2 + \zeta} \varrho_2(\zeta) \right], \tag{47}$$

$\varrho_1(\zeta)$ und $\varrho_2(\zeta)$, die sich in der Eigenparität der zugeordneten Zustände unterscheiden, sollen jetzt zwei verschiedene Massenspektralfunktionen sein, und nur $\varrho_1(\zeta)$ soll eine δ-Funktion bei der Nukleonenmasse enthalten. Da die Vakuumzweipunktfunktionen andererseits nicht frei wählbar sind, sondern aus der nichtlinearen (Γ_5-invarianten) Feldgleichung folgen sollen, kann dies effektiv nur eine Bedingung für den Grundzustand bedeuten, der demnach bezüglich der Parität entartet sein müßte.

Man überzeugt sich leicht, daß $\varrho_2(\zeta)$ nicht einfach gleich Null gesetzt werden kann, da z. B. alle Nukleonenzustände mit einer ungeraden Anzahl von π-Mesonen mit geradem Bahndrehimpuls Beiträge zu $\varrho_2(\zeta)$ ergeben [18].

Da die nichtlineare Differentialgleichung, wie vermutet wird, das Auftreten der δ- und δ'-Funktionen auf dem Lichtkegel verhindert, müssen die ϱ-Funktionen die Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} &\int [\varrho_1(\zeta) + \varrho_2(\zeta)]\, \mathrm{d}\zeta = 0, \\ &\int \zeta [\varrho_1(\zeta) + \varrho_2(\zeta)]\, \mathrm{d}\zeta = 0, \\ &\int \zeta^{1/2} [\varrho_1(\zeta) - \varrho_2(\zeta)]\, \mathrm{d}\zeta = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

In einer Näherung, in der wir uns auf die Beiträge der Pole zur Masse $\mu = \varkappa l$ der Nukleonen beschränken, d. h. in einer Näherung, in der wir die Vakuum-Zweipunktfunktionen einfach durch die Vakuumzweipunktfunktion eines freien WEYL-Spinorfeldes ersetzen, erhalten wir nach der Regularisierung wieder (32) oder

$$\langle 0 | X(\xi, l)\, \bar{X}(\xi', l) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^3} \int \mathrm{d}^4 q\, e^{i q(\xi - \xi')} \cdot \left[\frac{\varkappa^4 \Gamma_\mu q^\mu}{(q^2)^2 (q^2 + \mu^2)} - \frac{i \mu^3}{q^2 (q^2 + \mu^2)} \right]. \tag{49}$$

Diese genäherte Zweipunktfunktion entspricht den

[18] M. GELL-MANN u. F. E. LOW, Phys. Rev. **95**, 1300 [1954], Appendix.

Ansätzen

$$\varrho_1(\zeta) + \varrho_2(\zeta) = \delta(\zeta - \mu^2) - \delta(\zeta) + \mu^2\,\delta'(\zeta),$$

$$\varrho_1(\zeta) - \varrho_2(\zeta) = \delta(\zeta - \mu^2) - \frac{\mu}{\zeta^{1/2}}\,\delta(\zeta)\,, \tag{50}$$

welche die Bedingungen (48) erfüllen. Es sei darauf hingewiesen, daß bei dieser Regularisierung bei $\zeta = 0$ (und nur da) Anteile mit der „falschen" Eigenparität ($\varrho_2 \neq 0$) auftreten. Dies kann für die Existenz der Photonen von Bedeutung sein.

Die Differentialgleichung (43) und die genäherte Vakuum-Zweipunktfunktion (49) wollen wir im Abschnitt IV einer Berechnung von Masseneigenwerten zugrunde legen. Es sei jedoch bemerkt, daß die wahrscheinliche Sonderstellung von Teilchen mit verschwindender Masse bei Raumspiegelung noch nicht berücksichtigt wurde. Es ist möglich, daß die hier bezüglich der Parität symmetrisierte Theorie für Teilchen der Masse Null noch einer weiteren Einschränkung bedarf.

III. Berechnung von Masseneigenwerten ohne Paritätssymmetrisierung

Es sollen in diesem Abschnitt die Masseneigenwerte von Nukleonen und π-Mesonen durch Anwendung der neuen Tamm–Dancoff-Methode in der in (I, S. 460 ff.) definierten Weise näherungsweise beberechnet werden, und zwar zunächst in einer Näherung, welche noch keinen Gebrauch von einer Symmetrie bezüglich Raumspiegelung macht.

A. *Spinorteilchen*

Die Berechnung der Masseneigenwerte von Spinorteilchen ist im wesentlichen eine Wiederholung der Rechnung in (I, IV b) in der hier im Abschnitt I eingeführten Weyl-Spinordarstellung. Wir können uns deshalb damit begnügen, die Rechnung in einigen Punkten zu erläutern.

Wir legen der Rechnung die Differentialgleichung (18) und eine Kontraktionsfunktion

$$\tau^{\mathrm{V}}(x\,|\,x') \equiv F(x-x') \tag{51}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\; e^{i\,p(x-x')}\,\frac{\bar\sigma_\mu\,p^\mu}{(p^2-i\,\delta)^2\,(p^2+\varkappa^2-i\,\delta)}$$

zugrunde, die sich aus (19) ergibt, wenn man nur die (regularisierten) Beiträge des Nukleonenmassenpols berücksichtigt. Die spezielle Definition (51) ist der Definition (I, 108) völlig äquivalent. Eine Einheitsmatrix im Isospinraum ist dabei wieder in der Schreibweise unterdrückt. Gegenüber der früheren Rechnung sind folgende Substitutionen vorzunehmen

$$\psi \to \chi\,, \quad \psi^* \to \chi^*,$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_\mu \ldots \gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_\mu \to -\sum_{\mu=0}^{3} \sigma^\mu \ldots \sigma_\mu\,,$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_4\,\gamma_\mu\,\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to i\sum_{\mu=0}^{3} \sigma^\mu\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{52}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu\,\gamma_4\,p_\mu \to i\sum_{\mu=0}^{3} \bar\sigma_\mu\,p^\mu\,.$$

Hierbei sollen die σ_μ auf der rechten Seite immer als Einheitsmatrizen im Isospinraum aufgefaßt werden, was bei der Spurbildung von Bedeutung wird. Da der Isospin nur in recht trivialer Weise eingeht, haben wir es in der praktischen Rechnung nur mit den Pauli-Matrizen σ_μ zu tun, welche die nützlichen Regeln erfüllen:

$$\sigma_\mu\,\bar\sigma_\nu + \sigma_\nu\,\bar\sigma_\mu = -2\,g_{\mu\nu}\,, \qquad \sigma_\nu\,\bar\sigma_\mu\,\sigma^\nu = 2\,\sigma_\mu\,,$$

$$\bar\sigma_\nu\,\sigma_\varrho\,\bar\sigma_\tau\,\sigma^\nu = 4\,g_{\varrho\tau}\,, \qquad \sigma_\nu\,\bar\sigma_\varrho\,\sigma_\tau\,\bar\sigma_\varkappa\,\sigma^\nu = 2\,\sigma_\varkappa\,\bar\sigma_\tau\,\sigma_\varrho\,. \tag{53}$$

Die Rechnung liefert, genau wie in (I, 115), für die drei einfachsten Näherungen (zweifache Iteration und Kontraktion) dieselbe Eigenwertgleichung, die nun die Form hat:

$$\sigma_\mu\,J^\mu\left[1 + \left(\frac{\varkappa\,l}{4\,\pi}\right)^4 24\,L(X^2)\right]\tau = 0 \tag{54}$$

mit $X^2 = -J^2/\varkappa^2$ und der Funktion $L(X^2)$ wie in (I, 114). τ ist hierbei die vierkomponentige Weyl-Isospinfunktion des Fermi-Teilchens. Aus der Konsistenzforderung ergibt sich, wie früher, der Masseneigenwert des Nukleons zu

$$\varkappa\,l = \varkappa_{\mathrm{N}}\,l = 6{,}39\,, \tag{55}$$

doch tritt, ebenfalls wie in (I), noch eine zweite Lösung bei $\varkappa' = 1{,}26\,\varkappa_{\mathrm{N}}$ auf, die das Verfahren letztlich dann doch inkonsistent werden läßt.

B. *Bose-Teilchen*

Bei der Berechnung der Eigenwerte für Bosonen zeigt sich ganz deutlich die Überlegenheit der Weyl-Isospindarstellung gegenüber der alten Darstellung. Zur Gewinnung einer Eigenwertgleichung für Bose-Teilchen mit der Quantenzahl $I_N = 0$ (d. h. im wesentlichen Teilchen mit Baryonen- und Leptonenzahl Null), brauchen wir jetzt nur die Einteilchenmatrixelemente der Form $\tau(x\,|\,y)$ zu betrachten. Diese Matrixelemente sind 2×2-Matrizen im Spinraum und 2×2-Matrizen im Isospinraum. Wir spannen sie deshalb auf die (reziproken) Basiselemente dieser

Räume auf und schreiben für ein Einteilchenmatrixelement, das zum Gesamtimpuls J^μ gehört

$$\begin{aligned}\tau(x \mid y) &\equiv \langle 0 \mid T\,\chi(x)\,\chi^*(y) \mid J, P_\sigma, P_\tau\rangle \\ &= M(J; z)\, e^{iJZ} \qquad (56)\\ &= A^\mu(J, P_\sigma; z)\,\bar{\sigma}_\mu\, P_\tau{}^\nu\, \bar{\tau}_\nu\, e^{iJZ},\end{aligned}$$

wobei $z = x - y$ die Relativkoordinate und $Z = \frac{1}{2}(x+y)$ die Schwerpunktskoordinate bedeutet. P_σ bezeichnet den Polarisationsvektor im Ortsraum, der die Bedingung

$$P_\sigma{}^\mu\, J_\mu = 0 \qquad (57)$$

erfüllen soll und durch die Spinrichtung des Teilchens im Ruhsystem definiert ist. P_τ ist der Polarisationsvektor im Isospinraum. Er ist durch den Isospinzustand des Teilchens festgelegt. Daß wir die reziproke Basis $\bar{\sigma}_\mu$, $\bar{\tau}_\nu$ nehmen, hat formale Gründe und ergibt sich aus der Vorschrift, daß Ausdrücke der Form $(\chi^*\, \sigma_\mu\, \tau_\nu\, \chi) = C_\mu\, D_\nu$ sich kovariant transformieren sollen.

Matrixelemente der Art $\tau(x \mid y)$ haben die Eigenschaften von Wellenfunktionen für Teilchen mit $l_N = 0$ und Spin und Isospin 0 oder 1. Speziell ist für Teilchen mit Spin $= 0$ und Isospin $= 0$ im Ruhsystem $(\mathfrak{J} = 0)$ nur $A^0\, P_\tau{}^0 \neq 0$, oder allgemein

$$(A^\mu\, P_\tau{}^\nu)_{0,0} = c_1(J^2)\, J^\mu\, \delta_0{}^\nu. \qquad (58)$$

Für Teilchen mit Spin $= 0$ und Isospin $= 1$ ist im Ruhsystem nur $A^0\, P_\tau{}^i \neq 0$, oder allgemein

$$(A^\mu\, P_\tau{}^\nu)_{0,1} = c_2(J^2)\, J^\mu\, P_\tau{}^i\, \delta_i{}^\nu, \qquad (59)$$

wo $P_\tau{}^i$ den dreidimensionalen Polarisationsvektor im Isospinraum bedeutet ($P_\tau{}^3$ Teilchen mit $m_\tau = 0$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\,(P_\tau{}^1 \pm i\, P_\tau{}^2)$ Teilchen mit $m_\tau = \pm 1$). Für Teilchen mit Spin $= 1$, Isospin $= 0$ ist im Ruhsystem $A^j\, P_\tau{}^0 \neq 0$, oder allgemein

$$(A^\mu\, P_\tau{}^\nu)_{1,0} = c_3(J^2)\, P_\sigma{}^\mu\, \delta_0{}^\mu \qquad (60)$$

mit der Bedingung (57) (d. h. $P_\sigma{}^0 = 0$ für $\mathfrak{J} = 0$). Schließlich ist für Teilchen mit Spin $= 1$, Isospin $= 1$ im Ruhsystem nur $A^j\, P_\tau{}^i \neq 0$, oder allgemein

$$(A^\mu\, P_\tau{}^\nu)_{1,1} = c_4(J^2)\, P_\sigma{}^\mu\, P_\tau{}^i\, \delta_i{}^\nu \qquad (61)$$

mit Bedingung (57).

Einteilchenmatrixelemente der Form $\tau(x\, y \mid)$ beschreiben jetzt, in Abweichung von (I), nur Bosonen mit der Quantenzahl $l_N = 1$ und Spin und Isospin 0 oder 1, also im wesentlichen Deuteronzustände. Die jetzige Darstellung hat also den großen Vorzug, daß die Isospininvarianz in jedem Schritt der Rechnung evident ist, im Gegensatz zur früheren Darstellung, in der sich z. B. die π^+- und π^0-Rechnung äußerlich völlig unterscheiden.

Formal läuft unsere Rechnung für die Matrixelemente $\tau(x \mid y)$ ganz analog zur früheren π^0-Rechnung. Wir erhalten für $z = 0$ (S-Wellenanteil) die zu (I, 126) analoge Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned}M(J; 0) = [&-\bar{\sigma}_\alpha\, \sigma^\mu\, M(J; 0)\, \sigma_\mu\, \bar{\sigma}_\beta \\ &+ \bar{\sigma}_\alpha\, \sigma^\mu\, \bar{\sigma}_\beta\, \mathrm{Sp}[(\sigma_\mu\, M(J; 0))] \qquad (62)\\ &\cdot (J^\alpha J^\beta D(\lambda) + g^{\alpha\beta}\, C(\lambda)).\end{aligned}$$

Die Funktionen $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$, wobei $\lambda = -J^2/\varkappa_N{}^2 = -J^2/\varkappa^2$ ist, haben dieselbe Bedeutung wie in (I, 125). Die Spur im 2. Glied ist über den Spin- und Isospinraum zu führen. Spannen wir nun $M(J; 0)$ nach Gl. (56) auf die (reziproken) Basiselemente des Spin- und Isospinraums auf, so erhält die Eigenwertgleichung die Form

$$\begin{aligned}A^\mu(J, P_\sigma; 0)\, P_\tau{}^\nu\, [&\bar{\sigma}_\mu[1 + 2(J^2 D + 2\,C)\,(\bar{\tau}_\nu + \mathrm{Sp}\,\bar{\tau}_\nu)] \\ &- 4\, J_\mu(\bar{\sigma}_\beta\, J^\beta)\, D(\bar{\tau}_\nu + \mathrm{Sp}\,\bar{\tau}_\nu)] = 0 \qquad (63)\end{aligned}$$

oder im Ruhsystem des Teilchens [$\mathfrak{J} = 0$ bzw. $J^2 = -(J^0)^2$]

$$\begin{aligned}A^\mu(J^0, P_\sigma; 0)\, P_\tau{}^\nu\, [&\bar{\sigma}_\mu[1 + 4\,C(\bar{\tau}_\nu + \mathrm{Sp}\,\bar{\tau}_\nu)] \qquad (64)\\ &- \sigma_\mu\, 2\, J^2\, D(\bar{\tau}_\nu + \mathrm{Sp}\,\tau_\nu) = 0.\end{aligned}$$

Die Spur läuft jetzt nur noch über den τ-Raum.

Wir unterscheiden die vier Fälle:

1. Boson Spin $= 0$, Isospin $= 0$

$$1 - 6\, J^2\, D + 12\, C = 0. \qquad (65)$$

Dies entspricht der Eigenwertgleichung (I, 130) für das Isosingulett-π-Meson.

2. Boson Spin $= 0$, Isospin $= 1$

$$1 - 2\, J^2\, D + 4\, C = 0. \qquad (66)$$

Dies entspricht der Eigenwertgleichung (I, 129) für das π-Isotriplett.

3. Boson Spin $= 1$, Isospin $= 0$

$$1 + 6\, J^2\, D + 12\, C = 0. \qquad (67)$$

4. Boson Spin $= 1$, Isospin $= 1$

$$1 + 2\, J^2\, D + 4\, C = 0. \qquad (68)$$

Die Eigenwertgleichungen 3. und 4. wurden in (I) nicht behandelt und gehören, wie auch 1., zu empirisch nicht festgestellten Teilchen.

Wir haben schon in (I) gesehen, daß die Eigenwertgleichungen (65) und (66) je eine Lösung haben, wenn wir in der Differentialgleichung (1) bzw. (43) das positive Zeichen vor l^2 wählen. Wir erhalten die Masseneigenwerte

$$\pi\text{-Triplett:} \quad \varkappa_{\pi_1} = 0{,}30\,\varkappa_N \tag{69}$$

und $$\pi\text{-Singulett:} \quad \varkappa_{\pi_0} = 0{,}92\,\varkappa_N\,. \tag{70}$$

Man könnte hoffen, daß in einer höheren Näherung die Masse des Singuletts sich sogar größer als viermal die π-Triplettmasse ergäbe. In diesem Falle dürfte dann das Singulett gegenüber Zerfall in vier π-Triplett – was auf Grund der Erhaltungssätze möglich ist * – extrem instabil sein und müßte als diskreter Eigenwert verschwinden. Die Eigenwertgleichungen (67) und (68) für die Teilchen mit Spin = 1 liefern ebenfalls Lösungen für das positive Zeichen von l^2. Für das Teilchen 3. erhalten wir $\varkappa_{0,1} = 0{,}355\,\varkappa_N$ und für das Teilchen 4. $\varkappa_{1,1} = 0{,}110\,\varkappa_N$. Auch hier hat das Isotriplett den tieferen Eigenwert. Diese Lösungen stehen mit der Erfahrung in Widerspruch. Doch stellen die Eigenwertgleichungen in diesem Fall eine extrem schlechte Näherung dar, da wir ja bei ihrer Ableitung durch das Nullsetzen der Relativkoordinate nur Bindungszustände mit Bahndrehimpuls Null berücksichtigt haben. Bei Berechnung von Teilchen mit Spin 1 müssen aber jedenfalls noch die D-Zustände mitgenommen werden. (Die P-Zustände führen dagegen zu Teilchen der entgegengesetzten Parität.) Es ist zu hoffen, daß dadurch die Eigenwerte zu größeren Werten aufrücken und die zugeordneten Teilchen nur als extrem instabile Konfigurationen auftreten.

Die Rechnung für die Matrixelemente der Form $\tau(x\,y\,|\,)$ läßt sich ebenfalls einfach durchführen und läuft formal ähnlich wie die frühere Rechnung für π^+. Wir schreiben hier

$$\begin{aligned}\tau(x\,y\,|\,) &= M(J;z)\;c_\sigma\,c_\tau\;e^{iJZ}\\ &= (A^\mu(J,P_\sigma;z)\;\bar\sigma_\mu\,c_\sigma)(P_\tau{}^\nu\,\bar\tau_\nu\,c_\tau)\;e^{iJZ}.\end{aligned} \tag{71}$$

Es ist hierbei notwendig, die Matrizen c_σ und c_τ einzuführen mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} c_\sigma\,\sigma_\mu{}^{\mathrm T}\,c_\sigma{}^{-1} &= \bar\sigma_\mu\,, \qquad c_\sigma\,c_\sigma{}^* = c_\sigma{}^*\,c_\sigma = 1\,,\\ c_\sigma{}^{-1} &= c_\sigma{}^*, \qquad c_\sigma{}^{\mathrm T} = -\,c_\sigma \end{aligned} \tag{72}$$

und entsprechend für c_τ im Isospinraum, was in der üblichen Darstellung durch $c_\sigma = i\,\sigma_2$ und $c_\tau = i\,\tau_2$ gewährleistet ist. Denn nur dann transformieren sich, wie man leicht nachprüfen kann, A^μ und $P_\tau{}^\nu$ wie kovariante Vierervektoren und können auf dieselbe Art wie früher mit den Spin- und Isospinzuständen verknüpft werden. Da $\tau(x\,y\,|\,)$ in x und y antisymmetrisiert ist, muß gelten

$$M(J;z) = -\,c_\tau\,c_\sigma\,M^{\mathrm T}(J;\,-z)\;c_\sigma{}^{-1}\,c_\tau{}^{-1}. \tag{73}$$

Betrachten wir nur Matrixelemente mit Relativkoordinate $z=0$ (S-Wellen), so führt dies auf die Bedingung

$$A^\mu(J,P_\sigma;0)\;P_\tau{}^\nu(\bar\sigma_\mu\,\bar\tau_\nu + \sigma_\mu\,\tau_\nu) = 0\,, \tag{74}$$

d. h. $A^0\,P_\tau{}^0 = 0$ und $A^j\,P_\tau{}^i = 0$. Diese verbotenen Kombinationen sind Zuständen mit Spin = Isopin = 0 (beide antisymmetrisch) bzw. Spin = Isospin = 1 (beide symmetrisch) zugeordnet, die ja wegen dem PAULI-Prinzip bei symmetrischer Ortsfunktion (*S*-Wellen) nicht auftreten dürfen.

Für $M(J;0)$ erhalten wir eine (I, 126) ähnliche Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} M(J;0) = \bar\sigma_\alpha\,\sigma^\mu\,M(J;0)\;\bar\sigma_\mu\,\sigma_\beta \qquad\qquad\\ \cdot(J^\alpha J^\beta D(\lambda) + J^{\alpha\beta}C(\lambda))\,. \end{aligned} \tag{75}$$

Wegen

$$\sigma^\mu\,\bar\sigma_\varrho\,\bar\sigma_\mu = \sigma^\mu\,\sigma_\varrho\,\bar\sigma_\mu = \tfrac12\,\sigma^\mu(\sigma_\varrho + \bar\sigma_\varrho)\;\bar\sigma_\mu = -\,2\,(\sigma_\varrho + \bar\sigma_\varrho) \tag{76}$$

gilt im Ruhsystem des Teilchens die Gleichung

$$A^\mu(J^0,P_\sigma;0)\;P_\tau{}^\nu\,\bar\tau_\nu\,[\bar\sigma_\mu - 2(\sigma_\mu + \bar\sigma_\mu)(J^2 D + 4\,C)] = 0 \tag{77}$$

mit der Nebenbedingung (74).

Für das Spinsingulett-Isotriplett (z. B. S^1-Deuteron), das nach (74) das PAULI-Prinzip nicht verletzt, verschwindet in dieser Näherung die Wechselwirkung überhaupt, und wir erhalten nur die triviale Lösung $A^j\,P_\tau{}^0 = 0$, was dem $A_{\mu\nu} = 0$ in (I, 127) entspricht. Für das Spintriplett-Isosingulett (S^3-Deuteron z. B.) ergibt sich

$$A^0\,P_\tau{}^i(1 - 4\,J^2 D - 16\,C) = 0\,. \tag{78}$$

Diese Gleichung entspricht (I, 128) und hat für positives l^2 ebenfalls keine nichttriviale Lösung. Das Deuteron tritt also in dieser Näherung nicht auf. Da wir das Nukleon in einer höheren Näherung (2-fache Iteration) berechnet haben, sind aber auch gar nicht richtige Werte für das Deuteron bei einer einmaligen Iteration zu erwarten. Dazu müssen beim Deuteron, wegen seiner losen Struktur, die spezifisch π-mesonischen Wechselwirkungen eine wesentliche Rolle spielen, die von unserem Standpunkt aus erst in gewissen sehr hohen Näherungen (Aufsummation von unendlichen Zöpfen z. B.) erfaßt werden.

* G. FEINBERG, private Mitteilung.

IV. Berechnung von Masseneigenwerten mit Paritätssymmetrisierung

Wir wollen jetzt die Masseneigenwerte der einfachsten Spinor- und BOSE-Teilchen in einer Näherung berechnen, in der wir von der Symmetrie bezüglich Raumspiegelung explizit Gebrauch machen.

Wir wollen dieser Rechnung dabei die Dgl. (29) mit den verdoppelten Spinoperatoren X

$$\Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} X \pm l^2 [a_1 \Gamma_5 \Gamma^\mu X (\bar{X} \Gamma_5 \Gamma_\mu X) + a_2 \Gamma^\mu X (\bar{X} \Gamma_\mu X)] = 0 \tag{79}$$

zugrunde legen, und für die Kontraktionen die Funktion

$$\tau^{\mathrm{V}}(x \,|\, x') = \frac{\varkappa^3}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 p \, \frac{e^{i p (x-x')}}{(p^2+\varkappa^2 - i\delta)(p^2 - i\delta)} \cdot \left[-\frac{\varkappa \Gamma_\mu p^\mu}{p^2 - i\delta} + i \right] \tag{80}$$

verwenden, die sich aus den genäherten Vakuumerwartungswerten (31) ableiten läßt. Eine Einheitsmatrix im Isospinraum ist wieder überall unterdrückt.

Wir wollen die Rechnung mit willkürlichen Konstanten a_1 und a_2 durchführen, da sie dann einerseits durch die – allerdings unphysikalische – Spezialisierung $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ erlaubt, den Anschluß an die in (I) durchgeführte Rechnung mit Σ-Raum herzustellen, andererseits jedoch bei Spezialisierung $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ in die Rechnung übergeht, die bei Berücksichtigung der in Abschnitt II definierten strengen Spiegelungssymmetrie (l-Parität) resultiert. Die Fälle $a_1 \neq a_2$ haben für die Theorie wohl keine direkte Bedeutung. Die einzige Möglichkeit einer beschränkten Bedeutung könnte im Prinzip darin bestehen, daß gewisse Beiträge höherer Näherungen in einer Theorie mit $a_1 = a_2$ schon in einer niederen Näherung durch eine geeignete Wahl von $a_1 \neq a_2$ mitberücksichtigt werden.

Für den im Augenblick allein interessanten Fall $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ ergibt sich folgender Sachverhalt: In einer Näherung, in der wir die Eigenwertgleichungen von Spinor- und BOSE-Teilchen durch Iteration von Einpunkt- und Zweipunktfunktionen abzuleiten suchen, stimmen die Eigenwerte – wie man auch unmittelbar durch einen Vergleich von (43) und (5) im Rechenverfahren einsehen kann – mit den entsprechenden Eigenwerten der Gleichungen überein, die sich schon aus dem im Abschnitt II durchgeführten „nichtsymmetrisierten" Näherungsverfahren ergeben. Allerdings erscheinen nun im Vergleich zum Abschnitt III alle Lösungen doppelt. Diese Entartung der Lösungen rührt daher, daß das „Massenglied" in der Kontraktionsfunktion in diesen niedersten Näherungen bei der Berechnung der Eigenwerte ganz herausfällt – woraus sich die Übereinstimmung mit dem unsymmetrisierten Verfahren erklärt – und damit auch die im Abschnitt II eingeführte Nebenbedingung, welche das Vorzeichen des Massengliedes für die Nukleoneneinteilchenzustände festlegt, verlorengeht. In diesen Näherungen können wir deshalb die Nebenbedingung nur derart berücksichtigen, daß wir aus der Gesamtheit der Lösungen nur diejenigen mit der richtigen Eigenparität herauslesen. Dadurch wird die Zahl der Lösungen wieder auf die Hälfte reduziert. In Näherungen, die zur Darstellung der Fermionen und Bosonen auch noch die 3-Punkt- bzw. die 4-Punkt-Funktionen verwenden, geht das „Massenglied" wesentlich ein, und die Auswahl der „richtigen" Lösungen müßte dann automatisch erfolgen *. Als ein Beispiel für die Möglichkeit eines solchen Verhaltens mag die Rechnung mit den Parametern $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ dienen, in die das Massenglied schon in den niedersten Näherungen wesentlich in die Rechnung eingeht. Wie wir sehen werden, haben die resultierenden Eigenwertgleichungen für Spinorteilchen hier keine reellen Lösungen mehr für die Nukleonen „falscher" Eigenparität.

A. *Spinorteilchen*

Die Rechnung für das Spinorteilchen läuft analog zu (I), wenn wir

$$Y(p) = \left[-\frac{\varkappa \Gamma_\mu p^\mu}{p^2 - i\delta} + i \right] \tag{81}$$

setzen und beachten, daß der Vertex nun neben der Axialvektor- auch noch eine Vektorkopplung enthält. Diese beiden Kopplungen verhalten sich in der Rechnung praktisch gleich, da sich das Γ_5 immer „durchschieben" läßt. Da jedoch hierbei ein Vorzeichenwechsel resultieren kann, ist verständlich, daß Eigenwertgleichungen von der Form (I, 134) auftreten, wo nun jedoch statt l^2 sowohl $l^2(a_1 + a_2)$, als auch $l^2(a_1 - a_2)$ vorkommen kann. Die Eigenwertgleichun-

* Anm. b. d. Korr.: In der Tat stellt sich heraus, daß man schon bei einer etwas konsequenteren Durchführung des Rechenverfahrens für die 2-Punkt-Funktionen zusätzliche Bedingungen ableiten kann, welche sich nur durch die Lösungen mit der „richtigen" Parität befriedigen lassen. Vgl. hierzu H.-P. DÜRR u. W. HEISENBERG, Z. Naturforschg., in Vorbereitung.

gen, die sich bei den drei zu (I, 113 a – c) analogen Näherungen ergeben, sind alle von der Form

$$\Gamma_\mu J^\mu \left[1 + \left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^4 [c_L L(X^2) - c_M M(X^2)]\right] \qquad (82)$$
$$= i\varkappa \left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^4 c_N N(X^2)$$

mit Konstanten c_L, c_M und c_N, die nur noch von $(a_1 + a_2)$ und $(a_1 - a_2)$ bzw. a_1 und a_2 abhängen

$$c_L = 40(a_1^2 + a_2^2) + 16\, a_1 a_2 ,$$
$$c_M = 20(a_1^2 - a_2^2) , \quad c_N = 8\, a_1 (a_1 - a_2) ; \qquad (82\,\mathrm{a})$$

$$c_L = 40(a_1^2 + a_2^2) + 16\, a_1 a_2 , \qquad (82\,\mathrm{b})$$
$$c_M = 4(a_1^2 - a_2^2) , \quad c_N = 8(a_1 - a_2)(3\, a_1 + 2\, a_2) ;$$

$$c_L = 40(a_1^2 + a_2^2) + 16\, a_1 a_2 ,$$
$$c_M = 4(a_1 - a_2)^2 , \quad c_N = 24(a_1^2 - a_2^2) . \qquad (82\,\mathrm{c})$$

Als mittlere Werte ergeben sich

$$\bar{c}_L = 40(a_1^2 + a_2^2) + 16\, a_1 a_2 ;$$
$$\bar{c}_M = \tfrac{4}{3}\, (a_1 - a_2)(7\, a_1 + 5\, a_2) ; \qquad (83)$$
$$\bar{c}_N = \tfrac{8}{3}\, (a_1 - a_2)(7\, a_1 + 5\, a_2) .$$

Setzen wir speziell $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$, was der in (I) durchgeführten Rechnung mit Σ-Raum entspricht, so ergeben sich die Werte

$$c_L = 10 , \quad c_M = 5 , \quad c_N = 2; \qquad (84\,\mathrm{a})$$
$$c_L = 10 , \quad c_M = 1 , \quad c_N = 6; \qquad (84\,\mathrm{b})$$
$$c_L = 10 , \quad c_M = 1 , \quad c_N = 6 . \qquad (84\,\mathrm{c})$$

Dies sollte dem in (I, 134 a – c) aufgeführten Satz entsprechen [19].

Mit den mittleren Zahlwerten $\bar{c}_L = 10$, $\bar{c}_M = \frac{7}{3}$, $\bar{c}_N = \frac{14}{3}$ und den Funktionswerten $L(1) = -0{,}6238$, $M(1) = 1{,}9082$, $N(1) = 2{,}3060$ hat die Eigenwertgleichung mit $J^2 = -\varkappa^2 \neq 0$

$$\left(\frac{4\pi}{\varkappa l}\right)^4 + \bar{c}_L L(1) - \bar{c}_M M(1) = \pm \bar{c}_N \mathrm{N}(1) . \qquad (85)$$

nur für das Pluszeichen auf der rechten Seite („richtige“ Eigenparität) eine einzige Nullstelle [19] bei

$$\varkappa l = \varkappa_{\mathrm{N}} l = 5{,}83 . \qquad (86)$$

Das Näherungsverfahren wäre also hier konsistent.

Setzen wir $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, so erhalten wir, wie schon erwähnt, wieder dieselbe Eigenwertgleichung wie im Abschnitt III, Gl. (54), da $c_M = c_N = 0$ und $c_L = 24$ wird, und es ergibt sich deshalb auch wieder derselbe Eigenwert (55). Die nun formal auftretenden zwei entarteten Nukleonendoubletts werden durch die Nebenbedingung der Art (38) wieder auf ein Doublett reduziert.

B. *Bose-Teilchen*

Die Masseneigenwerte der Bose-Teilchen mit der Quantenzahl $I_N = 0$ (also im wesentlichen Teilchen mit Baryonen- und Leptonenzahl Null) ergeben sich aus den Eigenwertgleichungen der Einteilchen-Matrixelemente $\tau(x \mid y)$. Diese sind nun 8×8-Matrizen und lassen sich auf die Elemente der Algebra aufspannen, die man durch direkte Produktbildung aus der Dirac- und der Isospinalgebra erhält

$$\tau(x \mid y) = \langle 0 \mid T\, X(x)\, \bar{X}(y) \mid J, P_\sigma, P_\tau \rangle$$
$$= M(J, P_\sigma, P_\tau; z)\, e^{i J Z}$$
$$= [A_0(J, P_\sigma; z) + A_5(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_5 \qquad (87)$$
$$+ A^\mu(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_\mu + A^{5\mu}(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_5 \Gamma_\mu$$
$$+ A^{\mu\nu}(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_{\mu\nu}]\, P_\tau^{\alpha} \tau_\alpha .$$

In einer Näherung, in der wir in der Kontraktionsfunktion nur die Anteile der freien Nukleonen berücksichtigen und denen wir durch eine Nebenbedingung nur positive Eigenparität zuordnen, müssen wir diese Matrixelemente noch dadurch einschränken, daß wir für $\tau(x \mid y)$ dieselben Paritätseigenschaften wie für ein Teilchen-Antiteilchen-System fordern. Wir setzen also

$$\langle 0 \mid T\, X(x)\, \bar{X}(y) \mid J, P_\sigma, P_\tau \rangle$$
$$= -\Gamma^4 \langle 0 \mid T\, X(x')\, \bar{X}(y') \mid J', P_\sigma', P_\tau \rangle\, \Gamma^4, \qquad (88)$$

wobei x', y', J', P_σ' die räumlich gespiegelten Vektoren sind, die man bei x, y und J durch Umkehrung der raumartigen, bei dem pseudovektoriellen P_σ dagegen durch Umkehrung der zeitartigen Projektionen erhält. Die durch diese Bedingung eliminierten Teilchenzustände sind Zustände „falscher“ Eigenparität, die einmal aus Systemen von z. B. einem Antinukleon mit „richtiger“ (d. h. negativer) und einem Nukleon „falscher“ (d. h. negativer) Eigenparität, die ausgeschlossen wurden, bestehen, dann sich andererseits aber auch auf Systemen

[19] Die in I bei Benützung des Σ-Raumes abgeleiteten Zahlwerte entsprechen einem Mittelungsverfahren, das vom hier benützten abweicht und vom Standpunkt der hier durchgeführten Rechnungen aus als inkonsequent erscheint. Bei konsequenter Rechnung ergeben sich die hier angeführten Koeffizienten und Masseneigenwerte, wobei aber zu bedenken ist, daß die Annahme $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ willkürlich ist und einstweilen nicht physikalisch begründet werden kann.

aufbauen, wie z. B. einem Antinukleon und Nukleon-π-Meson-Zuständen, die in der Massenfunktion $\varrho_2(\zeta)$ von (47) vorkommen, aber in dieser Näherung vernachlässigt wurden.

Wir wollen die Funktionen $A(J, P_\sigma; z)$ in (87) für den Fall $z=0$ (S-Zustand) diskutieren. $A_0(J, P_\sigma; 0)$ kann wegen (57) nur von J^2 abhängen. Wegen (88) (keine positive Parität im S-Zustand!) muß jedoch gelten

$$A_0(J, P_\sigma; 0) = A_0(J^2) = 0\,. \tag{89}$$

$A_5(J, P_\sigma; 0)$ kann ebenfalls nur von J^2 abhängen. Es gehört zu einem Teilchen negativer Eigenparität und Spin $=0$. Die $A^\mu(J, P_\sigma; 0)$ treten bei spinlosen Zuständen positiver Parität und Zuständen mit Spin 1 und negativer Parität auf; die $A^{5\mu}(J, P_\sigma; 0)$ kommen dagegen bei spinlosen Teilchen negativer Parität und Teilchen mit Spin 1 und positiver Parität vor. Wegen (88) verschwinden die positiven Paritätsanteile

$$A^\mu_+(J, P_\sigma; 0) = A^{5\mu}_+(J, P_\sigma; 0) = 0 \tag{90}$$

und es bleiben deshalb in $A^{5\mu}$ wegen

$$A^{5\mu}(J, P_\sigma; 0) = a_{5,0}(J^2)\; J^\mu \tag{91}$$

nur die Beiträge mit Spin 0, in A^μ wegen

$$A^\mu(J, P_\sigma; 0) = a_{5,1}(J^2)\; P_\sigma{}^\mu \tag{92}$$

nur die Anteile zum Spin 1 übrig.

Schließlich kann $A^{\mu\nu}(J, P_\sigma; 0)$ nur in der Form

$$A^{\mu\nu}(J, P_\sigma; 0) = a(J^2)\; (J^\mu P_\sigma{}^\nu - J^\nu P_\sigma{}^\mu) \tag{93}$$

vorkommen und gehört dann zu einem Teilchen negativer Parität und Spin $=1$. Dagegen ist wegen (88)

$$A^{\mu\nu}_+(J, P_\sigma; 0) = a'(J^2)\; e^{\mu\nu\varkappa\lambda}\, J_\varkappa (P_\sigma)_\lambda = 0. \tag{94}$$

Wir sehen also, daß für jedes Teilchen mit gegebenem Spin im allgemeinen zwei Glieder der Dirac-Algebra nicht verschwinden. Das Verhältnis der Koeffizienten dieser Glieder wird durch die Eigenwertgleichung festgelegt und steht in Beziehung zu der inneren Struktur dieser Teilchen.

Die Berechnung der Masseneigenwerte der Bosonen $\tau(x|y)$ läuft im wesentlichen wie die frühere Rechnung für das π^0-Meson mit Σ-Raum. Wir erhalten eine Eigenwertgleichung für die Matrixelemente M an der Stelle $z=0$ von der Form

$$M(J, P_\sigma, P_\tau; 0) = K_1(J)\; M(J, P_\sigma, P_\tau; 0)\; K_2(J),$$

wo K_1 und K_2 bestimmte Γ- und τ-Matrizen sind, die noch vom Impuls J^μ abhängen. Beim Vergleich der Elemente der Dirac-Algebra auf der linken und rechten Seite erhält man ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Funktionen $A_0 P_\tau{}^\alpha$, $A_5 P_\tau{}^\alpha$, $A^\mu P_\tau{}^\alpha$, $A^{5\mu} P_\tau{}^\alpha$, $A^{\mu\nu} P_\tau{}^\alpha$:

$$[1 - 4(J^2 D + 4C)(a_1 - a_2)]\, \bar\tau_\alpha A_0 P_\tau{}^\alpha = 0\,, \tag{95}$$

$$[1 - 4(J^2 D + 4C)(a_1 - a_2)]\, \bar\tau_\alpha A_5 P_\tau{}^\alpha = 2B[(a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_1 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha]\, J_\mu A^{5\mu} P_\tau{}^\alpha\,, \tag{96}$$

$$[\bar\tau_\alpha g_{\mu\nu} + 2[(a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_2 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha]\, [(J^2 g_{\mu\nu} - 2J_\mu J_\nu)\, D + 2C g_{\mu\nu}]\, A^\nu P_\tau{}^\alpha = 0\,, \tag{97}$$

$$[\bar\tau_\alpha g_{\mu\nu} + 2[(a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_1 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha]\, [(J^2 g_{\mu\nu} - 2J_\mu J_\nu)\, D + 2C g_{\mu\nu}]\, A^{5\nu} P_\tau{}^\alpha = 4B(a_1 - a_2)\bar\tau_\alpha J_\mu A_5 P_\tau{}^\alpha\,, \tag{98}$$

$$\bar\tau_\alpha A^{\mu\nu} P_\tau{}^\alpha = B[(a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_2 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha]\, (J^\mu A^\nu - J^\nu A^\mu)\, P_\tau{}^\alpha\,. \tag{99}$$

Für die Teilchen negativer Parität und Spin $=0$ setzen wir in (96) und (98) $A^{5\mu}$ in der Form (91) an und erhalten dann das gekoppelte Gleichungssystem

$$\begin{gathered}[1 - 4(J^2 D + 4C)(a_1 - a_2)]\, \bar\tau_\alpha A_5 P_\tau{}^\alpha = 2BJ^2[(a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_1 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha]\, a_{5,0} P_\tau{}^\alpha,\\ [\bar\tau_\alpha + 2[(a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_1 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha](-J^2 D + 2C)]\, a_{5,0} P_\tau{}^\alpha = 4B(a_1 - a_2)\bar\tau_\alpha A_5 P_\tau{}^\alpha\,.\end{gathered} \tag{100}$$

Dies führt zu einer Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned}\{[1 - 4(J^2 D + 4C)(a_1 - a_2)]\, [\bar\tau_\alpha + 2((a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_1 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha)(-J^2 D + 2C)]\\ - 8J^2 B^2 (a_1 - a_2)[(a_1 + a_2)\bar\tau_\alpha + 2a_1 \operatorname{Sp}\bar\tau_\alpha]\}\, P_\tau{}^\alpha = 0\,.\end{aligned} \tag{101}$$

Im Falle $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ erhält man wieder, wie zu erwarten, die im Abschnitt III gewonnene Gl. (64) bzw. (I, 129, 130). Für $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ dagegen reduziert sich die Eigenwertgleichung auf die in (I, 136, 137) angegebenen Gleichungen für das Isotriplett ($P_\tau{}^0 = 0$) bzw. für das Isosingulett, für das $P_\tau{}^0 \neq 0$, $P_\tau{}^i = 0$ und deshalb $\operatorname{Sp}(\bar\tau_\alpha P_\tau{}^\alpha) = 2P_\tau{}^0$ ist. Für positives Vorzeichen von l^2 in (43) und für $a_1 \geq a_2$ gibt es nur je eine Lösung des Gleichungssystems. Die unnormierten Eigenfunktionen haben die Form

Triplett: $\quad f_1(Z) = (J^\mu \Gamma_5 \Gamma_\mu + \alpha_1 \Gamma_5) \vec{\tau}\, e^{iJZ}, \quad (102)$

Singulett: $\quad f_0(Z) = (J^\mu \Gamma_5 \Gamma_\mu + \alpha_0 \Gamma_5) I\, e^{iJZ}; \quad (103)$

$$\alpha_1 = \frac{2 J^2 B(a_1+a_2)}{1-4(J^2 D+4 C)(a_1-a_2)}\bigg|_{J^2=-\lambda_{0,1}}, \quad (104)$$

$$\alpha_0 = \frac{2 J^2 B(5 a_1+a_2)}{1-4(J^2 D+4 C)(a_1-a_2)}\bigg|_{J^2=-\lambda_{0,0}}. \quad (105)$$

Für den Fall $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ ergeben sich die Eigenwerte für das π-Triplett [19] zu $\varkappa_{\pi_1} = \lambda_{0,1}^{1/2} \varkappa_N = 0{,}02\, \varkappa_N$ und für das π-Singulett [19] zu $\varkappa_{\pi_0} = \lambda_{0,0}^{1/2} \varkappa_N = 0{,}87\, \varkappa_N$. Sie sind also wesentlich kleiner als die in (I) angegebenen Werte. Die π-Triplett-Eigenfunktion ist praktisch durch den ersten Term in (103) gegeben, da $\alpha_1 \sim J^2/\varkappa_N^2 \approx 0$ ist.

Die Lösungen für die Teilchen negativer Parität und Spin $= 1$ findet man durch den Ansatz (92, 93) mit der Bedingung (57). Die Gln. (97, 99) werden dann

$$[\bar{\tau}_\alpha + 2[(a_1+a_2)\, \bar{\tau}_\alpha + 2\, a_1 \operatorname{Sp} \bar{\tau}_\alpha] \quad (106)$$
$$\cdot (J^2 D + 2 C)]\, a_{5,1} P_\tau{}^\alpha = 0 .$$

$$\bar{\tau}_\alpha\, a\, P_\tau{}^\alpha = B[(a_1+a_2)\, \bar{\tau}_\alpha + 2\, a_2 \operatorname{Sp} \bar{\tau}_\alpha]\, a_{5,1} P_\tau{}^\alpha. \quad (107)$$

Für $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ führt das wieder einfach auf (64). Für $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ ergibt sich für das Isotriplett (Spin $= 1$):

$$1 + J^2 D + 2 C = 0, \quad (108)$$

Isosingulett (Spin $= 1$):

$$1 + 5 J^2 D + 10 C = 0. \quad (109)$$

Die Eigenwerte werden jetzt im Vergleich zum Fall $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ kleiner und rücken in die Nähe der Eigenwerte der entsprechenden Spin $= 0$-Teilchen, da für sehr kleine Masseneigenwerte $J^2 D$ und $J^2 B^2$ gegen C vernachlässigt werden können. Wir sehen auch, daß der Spin $= 1$-Isosingulettzustand wegen der negativen Parität nicht mit dem Photon in Zusammenhang gebracht werden kann. Es wäre zu erwarten, daß die Photonen wegen ihrer positiven Eigenparität erst dann erscheinen können, wenn mindestens P-Zustände in Betracht gezogen werden. Prinzipiell besteht allerdings auch die Möglichkeit, daß sie wegen der Anteile „falscher" Parität ($\varrho_2 \neq 0$) in der regularisierten Kontraktionsfunktion (49) bei $\zeta = 0$ schon bei Berücksichtigung von S-Zuständen auftreten. Die Untersuchung von Lösungen für $J^2 = 0$ soll jedoch in einer anderen Arbeit durchgeführt werden.

Die Rechnung für die Teilchen mit $I_N = 1$, die durch die Matrixelemente der Form $\tau(x y\,|\,)$ beschrieben werden, kann ebenfalls einfach durchgeführt werden. Schreiben wir analog zu (71) jetzt

$$\tau(x y\,|\,) = M(J; z)\, c_\tau C\, e^{iJZ} \quad (110)$$

mit

$$M(J; z) = [A_0(J, P_\sigma; z) + A_5(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_5$$
$$+ A^\mu(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_\mu + A^{5\mu}(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_5 \Gamma_\mu$$
$$+ A^{\mu\nu}(J, P_\sigma; z)\, \Gamma_{\mu\nu}]\, P_\tau{}^\alpha \bar{\tau}_\alpha \quad (111)$$

und der Antisymmetriebedingung (PAULI-Prinzip)

$$M(J; z) = -c_\tau C\, M^{\mathrm{T}}(J; z)\, C^{-1} c_\tau{}^{-1}, \quad (112)$$

so erhalten wir das Gleichungssystem

$$[1 - 4(J^2 D + 4 C)(a_1 + a_2)]\, A_0 P_\tau{}^\alpha = 0, \quad (113)$$

$$[1 - 4(J^2 D + 4 C)(a_1 + a_2)]\, A_5 P_\tau{}^\alpha \quad (114)$$
$$= 2 B(a_1 - a_2)\, J_\mu A^{5\mu} P_\tau{}^\alpha,$$

$$\{g_{\mu\nu} + 2(a_1 - a_2)[(J^2 g_{\mu\nu} - 2 J_\mu J_\nu) D \quad (115)$$
$$+ 2 C g_{\mu\nu}]\}\, A^\nu P_\tau{}^\alpha = 0,$$

$$\{g_{\mu\nu} + 2(a_1 - a_2)[(J^2 g_{\mu\nu} - 2 J_\mu J_\nu) D + 2 C g_{\mu\nu}]\}$$
$$\cdot A^{5\nu} P_\tau{}^\alpha = 4 B(a_1 + a_2)\, J^\mu A_5 P_\tau{}^\alpha, \quad (116)$$

$$A^{\mu\nu} P_\tau{}^\alpha = B(a_1 - a_2)(J^\mu A^\nu - J^\nu A^\mu)\, P_\tau{}^\alpha. \quad (117)$$

Stellen wir an $\tau(x y\,|\,)$ eine Gl. (88) analoge Paritätsbedingung

$$\langle 0\,|\, T\, X_\alpha(x)\, X_\beta(y)\,|\, J, P_\sigma, P_\tau\rangle \quad (118)$$
$$= \Gamma^4_{\alpha\gamma} \Gamma^4_{\beta\delta} \langle 0\,|\, T\, X_\gamma(x')\, X_\delta(y')\,|\, J', P_\sigma', P_\tau\rangle$$

bzw. $\quad M(J; z) = -\Gamma^4 M(J'; z')\, \Gamma^4, \quad (119)$

so folgen Bedingungen der Art Gln. (89), (90), (94).

Aus (114 − 117) ergeben sich für $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ Eigenwertgleichungen für $A_5 P_\tau{}^\alpha$, $a_{5,0} P_\tau{}^\alpha$, $a_{5,1} P_\tau{}^\alpha$ und $a P_\tau{}^\alpha$, die noch der Nebenbedingung (112) gehorchen müssen. Diese Gleichungen sind wieder, wie zu erwarten, vollständig äquivalent der Gl. (77) mit der Nebenbedingung (74).

Im Falle $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ hingegen werden Gl. (114) und (116) identisch mit Gl. (96) bzw. (98) für $\operatorname{Sp} \bar{\tau}_\alpha = 0$ (Isotriplett). Dies bedeutet, daß die Deuteronzustände in diesem Falle dieselbe Masse wie die π-Isotriplett-Zustände erhalten, was physikalisch unzulässig ist. Wie schon erwähnt, ist diese Entartung eine Folge der dann zusätzlich auftretenden Symmetriegruppe (31), die eine Rotationssymmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen ausdrückt.

Herrn Professor Dr. W. HEISENBERG möchte ich für sein reges Interesse an dieser Arbeit und für zahlreiche Diskussionen meinen herzlichen Dank aussprechen.

Anhang

p-Parität und l-Parität für ein freies Weyl-Feld

Wir betrachten die speziellen Lösungen einer KLEIN–GORDON-Gleichung [20] zur Energie $q^0 = p^0 |l|$ für ein zweikomponentiges Spinorfeld (freies WEYL-Feld) der Masse $\mu = \varkappa |l|$, die zum Gesamtdrehimpuls j mit z-Komponente m und positiver k-Quantenzahl $[k = +|j+\frac{1}{2}|$, also die Lösung, bei der im nichtrelativistischen Grenzfall $(k \to L+1)$ Spin und Bahndrehimpuls L parallel stehen] gehören, als Funktion der dimensionslosen Ortskoordinaten $\vec{\xi} = \mathfrak{r}/l$ und der Zeit $\xi^0 = t/|l| = \varepsilon_l\, t/l$

$$\varphi_{j,+}'^{m}(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l) = c \frac{1}{|l|^{3/2}} \cdot \left[\varphi_{j-\frac{1}{2},j}^{m} - i \frac{|q^{02}-\mu^2|^{1/2}}{q^0+\mu} \varepsilon_e\, \varphi_{j+\frac{1}{2},j}^{m}\right], \tag{A 1}$$

$$\tilde{\varphi}_{j,+}'^{m}(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l) = c \frac{1}{|l|^{3/2}} \cdot \left[\varphi_{j-\frac{1}{2},j}^{m} + i \frac{|q^{02}-\mu^2|^{1/2}}{q^0+\mu} \varepsilon_e\, \varphi_{j+\frac{1}{2},j}^{m}\right]. \tag{A 2}$$

Hierbei ist c eine beliebige Normierungskonstante und

$$\varphi_{j\pm\frac{1}{2},j}^{m} = h_{j\pm\frac{1}{2}}(|q^{02}-\mu^2|^{1/2}\xi)\, W_{j\pm\frac{1}{2},j}^{m}(\vartheta,\varphi). \tag{A 3}$$

$h_j \pm \frac{1}{2}$ sind die bei Separation in Kugelkoordinaten auftretenden HANKEL-Funktionen mit halbzahligem Index und reellem Argument

$$h_s(\varrho) = \left(\frac{\pi}{2\varrho}\right)^{1/2} H_{s+\frac{1}{2}}(\varrho). \tag{A 4}$$

Sie beschreiben die Abhängigkeit der Eigenfunktionen vom Radius $\xi = |\vec{\xi}|$. Die Winkelabhängigkeit wird durch die Funktionen $W(\vartheta,\varphi)$ gegeben

$$W_{j+\frac{1}{2},j}^{m}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{[2(j+1)]^{1/2}} \cdot [(j-m+1)^{1/2} Y_{j+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\, u_1 + (j+m+1)^{1/2} \cdot Y_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\, u_2], \tag{A 5}$$

$$W_{j-\frac{1}{2},j}^{m}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{[2j]^{1/2}} \cdot [(j+m)^{1/2} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\, u_1 - (j-m)^{1/2} \cdot Y_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\, u_2]. \tag{A 6}$$

$Y_{e'}^{m'}(\vartheta,\varphi)$ sind die üblichen orthonormierten zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art, $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ die beiden orthogonalen Spineigenfunktionen in einer Darstellung, in der σ_3 diagonal ist.

Wir stellen zunächst fest, daß sowohl φ' als auch $\tilde{\varphi}'$ die KLEIN–GORDON-Gleichung zur Masse μ und Energie q^0 erfüllen. Ferner entsteht die Funktion $\tilde{\varphi}'$ aus φ durch die Anwendung des Operators

$$\frac{\sigma_\mu p^\mu}{\varkappa} = \frac{i}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial \xi^0} - \varepsilon_l \vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right].$$

Dies verifizieren wir am einfachsten dadurch, daß wir den Operator $\vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}$ in Kugelkoordinaten umschreiben

$$\vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} = \sigma_\xi\, \sigma_\xi\, \vec{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} = \sigma_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathfrak{L}}}{\xi}\right] \tag{A 7}$$

wobei $\sigma_\xi = \frac{1}{\xi}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\xi})$ ist und $\vec{\mathfrak{L}} = -i\left[\vec{\xi} \times \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right]$ der Bahndrehimpulsoperator. Wegen

$$\mathfrak{J}^2 = (\tfrac{1}{2}\vec{\sigma} + \vec{\mathfrak{L}})^2 = L(L+1) + \tfrac{3}{4} + \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathfrak{L}} = j(j+1)$$

finden wir sofort

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathfrak{L}})\, W_{j+\frac{1}{2},j}^{m} = -(j+\tfrac{3}{2})\, W_{j+\frac{1}{2},j}^{m}, \tag{A 8}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathfrak{L}})\, W_{j-\frac{1}{2},j}^{m} = +(j-\tfrac{1}{2})\, W_{j-\frac{1}{2},j}^{m} \tag{A 9}$$

und auf Grund der Differentialbeziehungen für Kugelfunktionen [21] nach einiger Rechnung

$$\sigma_\xi\, W_{j\pm\frac{1}{2},j}^{m} = W_{j\mp\frac{1}{2},j}^{m}. \tag{A 10}$$

Da die HANKEL-Funktionen h_s die Differentialbeziehungen erfüllen

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{s+1}{\varrho}\right) h_s(\varrho) = h_{s-1}(\varrho), \tag{A 11}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{s}{\varrho}\right) h_s(\varrho) = -h_{s+1}(\varrho), \tag{A 12}$$

läßt sich $\tilde{\varphi}'$ nun leicht ausrechnen und wir erhalten (A 2).

Wir sehen nun sofort, daß der Übergang

$$\varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, l) \to \tilde{\varphi}(\vec{\xi}, \xi^0, l)$$

auch einfach durch

$$\varphi'(\vec{\xi}, \xi^0, l) \to \varphi(\vec{\xi}, \xi^0, -l)$$

erwirkt werden kann, da sich bei dieser Transformation nur das Vorzeichen von $\varepsilon_l = l/|l|$ umdreht. Dadurch werden auch die p- und die l-Paritätsoperationen miteinander identisch, und wir erhalten

$$P\, \varphi_{j,+}'^{m}(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l) = (-1)^{j-\frac{1}{2}}\, \varphi_{j,+}'^{m}(\mu, q^0; \vec{\xi}, \xi^0, l). \tag{A B}$$

In einer nichtrelativistischen Näherung bekämen wir einfach den bekannten Faktor $(-1)^L$.

Analoge Überlegungen lassen sich bei den Lösungen mit negativer k-Quantenzahl durchführen. Wir haben hierzu nur in (A 1) und (A 2) die Funktionen $\varphi_{j+\frac{1}{2},j}^{m}$ und $\varphi_{j-\frac{1}{2},j}^{m}$ miteinander zu vertauschen und die Vorzeichen der zweiten Glieder auf der rechten Seite umzukehren.

[20] Vgl. auch VAN DER WAERDEN [5], S. 99 ff. Beachte jedoch die etwas andere Definition der Kugelfunktionen.

[21] Zum Beispiel W. MAGNUS u. F. OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin 1948, S. 81 ff.